**Devoir Surveillé n° 3** **2éme Bac SM Biof**

**1ér Semestre Durée 3h**

*Les parties du sujet sont dépendantes*

## Partie I

1) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{2}{3}\right]$ ; on a: $-x-\frac{x^2}{2}-x^3 \leq \ln(1-x) \leq -x-\frac{x^2}{2}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{2}{3}\right]$; on a : $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

## Partie II

Soient u et v deux fonctions définies par :

$u(x)=x-1-x\ln x$ et $v(x)=1-x+x\ln(-x)$

1) a) Etudier les variations de u sur $\mathbb{R}_+^*$ (le calcul des limites n'est pas demande)

b) Déduire le signe de $u(x)$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) a) Etudier les variations de v sur $\mathbb{R}_-^*$ (le calcul des limites n'est demandé).

b) Montrer que l'équation $v(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ ; puis déduire le signe de $v(x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

## Partie III

On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & ; si\ x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$

1) Déterminer $D_f$ le domaine de définition de f et Calculer les limites aux bornes de $D_f$ ; puis donner une interprétation géométrique à chaque résultat.

2) a) Montrer que f est continue en $x_0=1$

b) En utilisant les résultats de la première partie; Etudier le dérivabilité de f en $x_0=1$.

3) a) Etudier la monotonie de f et dresser son tableau de variations.
(Utiliser les résultats de le deuxième partie)

b) Montrer que : $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha}$ . ($\alpha$ est la Solution de l'équation $v(x)=0$)

Construire $(C_f)$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend $\alpha \simeq -3,6$)

## Partie IV

Soit a un réel non nul.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $u_n=e^{-nf(a)}$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique ; puis déterminer sa raison et son premier terme.

2) Donner $S_n$ en fonction de n et f(a) ; puis étudier la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et calculer sa limite.

**Partie V**

*Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f_n$ *une fonction définie sur* $D_f \cup \{0\}$ *par :* $\begin{cases} f_n(x) = e^{-nf(x)} & ; \quad (\forall x \in D_f) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

*et* $(C_n)$ *la courbe représentative de* $f_n$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

*1) Etudier la continuité et le dérivabilité de* $f_n$ *en* $x_0 = 0$

*2) Utiliser les résultats de* ***la partie III*** *pour étudier les limites et la monotonie de* $f_1$ *; puis dresser son tableau de variation.*

*3) Construire* $(C_1)$ *la courbe de* $f_1$ *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

*4) Ecrire* $f_n(x)$ *en fonction de* $f_1(x)$ *; Puis déduire les variations de* $f_n$

*5) Etudier la position relative de* $(C_{n+1})$ *et de* $(C_n)$

*6) Construire les courbes* $(C_2)$ *et* $(C_3)$ *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$