

①

Correction de la série n°3  
 "Etude de fonctions logarithmiques"  
Terminale S

Exercice 1 Partie A

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x \quad ; \text{ pour } x \in ]0; +\infty[.$$

- 1)  $u$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme somme de deux fonctions  $x \mapsto x^2 - 2$  et  $x \mapsto \ln x$  dérivables sur  $]0; +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$

on a :

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$\text{et } (\forall x \in ]0; +\infty[); u'(x) > 0.$$

donc  $u$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

- 2) a)  $u$  est continue strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et  $u(]0; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)[$

$$= ]-\infty; +\infty[.$$

De plus  $0 \in ]-\infty; +\infty[$ ; donc d'après TVI l'équation  $u(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .

b) Exécuter sur la calculatrice.

- 3) soit  $x < \alpha$ ; donc  $u(x) < u(\alpha)$  et  $u(\alpha) = 0$   
 d'où  $u(x) < 0$

o) soit  $x > \alpha$  ; donc  $u(x) > u(\alpha)$  et  $u(\alpha) = 0$   
d'où  $u(x) > 0$

Conclusion

$$\begin{cases} u(x) \leq 0 & \text{pour } x \in ]0; \alpha] \\ u(x) \geq 0 & \text{pour } x \in [\alpha; +\infty[ \end{cases}$$

4) On a :  $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$   
 $\Leftrightarrow \boxed{\ln \alpha = 2 - \alpha^2}$

Partie B

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2 ; \text{ pour } x \in ]0; +\infty[.$$

1. Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  ; on a :

$$f'(x) = 2x + 2(2 - \ln x)'(2 - \ln x)$$

$$= 2x - \frac{2}{x}(2 - \ln x)$$

$$= 2 \left( \frac{x^2 - 2 + \ln x}{x} \right)$$

$$= \frac{2u(x)}{x}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in ]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{2u(x)}{x}.$$

2. On déduit de la question précédente que  $f'(x)$  est du même signe que  $u(x)$  (car  $x > 0$ )

$$\text{D'où : } \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \text{sur } [\alpha; +\infty[ \\ f'(x) \leq 0 & \text{sur } ]0; \alpha]. \end{cases}$$

Donc  $f$  est croissante sur  $[\alpha; +\infty[$  et décroissante sur  $]0; \alpha]$

② 3. l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1, est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \text{et} \quad f'(1) = -2 \quad ; \quad f(1) = 5$$

$$\text{Donc: } y = -2(x-1) + 5$$

$$y = -2x + 7$$

### Exercice 2

1.  $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $x^2+x+1 > 0$  ; (car son discriminant  $\Delta < 0$ )

Donc  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  car  $x^2+x+1 \neq 0$  ; et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ; on a :

$$f'(x) = \frac{x^2+x+1 - (2x+1)x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+x+1 - 2x^2-x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$$

2.  $g(x) = \frac{\ln x}{(\ln x)^2 + \ln x + 1}$  ; pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

a) On remarque que pour  $x > 0$  ; on a :

$$g(x) = f(\ln x)$$

b) On utilisera la formule de dérivation de fonction composée ; (rappel :  $(u \circ v)'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))$ )  
 d'où  $g'(x) = (f(\ln x))'$

$$= (\ln x)' \times f'(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1 - (\ln x)^2}{(\ln x)^2 + \ln x + 1}$$

$$= \frac{(1 - \ln x)(1 + \ln x)}{x ((\ln x)^2 + \ln x + 1)^2}$$

Donc :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) ; g'(x) = \frac{(1 - \ln x)(1 + \ln x)}{x ((\ln x)^2 + \ln x + 1)^2}$

c)  $g'(x)$  est du signe de  $(1 - \ln x)(1 + \ln x)$  sur  $]0; +\infty[$  ; d'où le tableau de signe de  $g(x)$ .

| $x$         | 0 | $\frac{1}{e}$ | $e$ | $+\infty$ |   |
|-------------|---|---------------|-----|-----------|---|
| $1 + \ln x$ | - | 0             | +   |           |   |
| $1 - \ln x$ |   | +             | 0   | -         |   |
| $g'(x)$     | - | 0             | +   | 0         | - |

d) On a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(\ln x)$  ou pose  $X = \ln x$   
 $x \rightarrow 0^+$  alors  $X \rightarrow -\infty$   
 $= \lim_{X \rightarrow -\infty} f(X)$

$$= 0$$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\ln x)$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 0$$

(3)

e) Tableau de variation de  $g$ ,

|         |   |               |                  |           |        |   |   |
|---------|---|---------------|------------------|-----------|--------|---|---|
| $x$     | 0 | $\frac{1}{e}$ | $e$              | $+\infty$ |        |   |   |
| $g'(x)$ |   | -             | 0                | +         | 0      | - |   |
| $g(x)$  | 0 |               | $g(\frac{1}{e})$ |           | $g(e)$ |   | 0 |

$$\text{et } g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1}$$

$$= \frac{-1}{(-1)^2 + (-1) + 1} = \frac{-1}{1 - 1 + 1} = -1.$$

$$g(e) = \frac{\ln e}{(\ln e)^2 + \ln e + 1} = \frac{1}{3}.$$

f) une équation de la tangente à  $\Gamma$  au point d'abscisse 1 est:

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) \quad \text{et } g(1) = 0$$

$$g'(1) = 1$$

$$\text{Donc } y = x - 1.$$

### Exercice 3

$$f(x) = 1 + x \ln x \quad ; \quad \text{pour } x \in ]0; +\infty[$$

$$\text{et } T: y = x.$$

$$1.a) \text{ On a: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x \ln x) = 1.$$

$$\left( \text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ (limite usuelle du cours)} \right)$$

b) Tableau de signe de  $x \ln x$  sur  $]0; 1]$

|           | 0 | 1 |
|-----------|---|---|
| $x$       |   |   |
| $\ln x$   |   |   |
| $x \ln x$ |   |   |

Donc  $x \ln x \leq 0$  sur  $]0; 1]$ .

D'où  $f(x) - 1 \leq 0$  sur  $]0; 1]$ .

Parsuite  $f(x) \leq 1$  sur  $]0; 1]$ .

2) a) Pour tout  $x \in ]0; 1]$  on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + x \ln x)' \\ &= \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

b) une équation de la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \text{et } f(1)=1; f'(1)=1$$

$$\text{d'où } y = x$$

donc  $T$  est une tangente à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1.

3)  $g(x) = 1 + x \ln x - x$  ; pour  $x \in ]0; 1]$ .

a) On a pour tout  $x \in ]0; 1]$  ;  $g(x) = f(x) - x$

$$\begin{aligned} \text{donc } g'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

④

alors  $g'(x)$  est du signe de  $\ln x$  sur  $]0, 1]$

d'où  $g'(x) \leq 0$  sur  $]0, 1]$

donc  $g$  est décroissante sur  $]0, 1]$

Tableau de variation de  $g$  sur  $]0, 1]$

|         |   |   |
|---------|---|---|
| $x$     | 0 | 1 |
| $g'(x)$ |   | — |
| $g(x)$  | 1 | 0 |

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2\ln x - x) = 1$$

(car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ )

b) on déduit de la question précédente que pour tout  $x \in ]0, 1]$  ;  $g(x) \geq 0$

$$\text{donc : } 1 + 2\ln x - x \geq 0 \Rightarrow f(x) - x \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq x$$

Donc (C) est au-dessus de T sur  $]0, 1]$

### Exercice 4

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} \text{ ; pour } x \in ]1, +\infty[.$$

1)  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  ; car  $x \mapsto \ln x$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et  $\ln x \neq 0$  sur  $]1, +\infty[$  et on a pour tout  $x \in ]1, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \ln x - \frac{1}{\ln x} \right)' \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2} \\
 &= \frac{(\ln x)^2 + 1}{x(\ln x)^2}
 \end{aligned}$$

Donc :  $(\forall x \in ]1; +\infty[); f'(x) = \frac{1 + (\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$ .

D'où  $f'(x) > 0$  sur  $]1; +\infty[$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .

•) On a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \ln x - \frac{1}{\ln x} \right)$

$$= -\infty.$$

(car  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$ ).

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty}$$

•)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x - \frac{1}{\ln x} \right) = +\infty$ .

(car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ )

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\textcircled{5} \quad 2.a) \text{ On a: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x - \frac{1}{\ln x} - \ln x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\ln x} \right) = 0$$

$$\left( \text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \right)$$

Donc les courbes (C) et  $\Gamma$  sont asymptotes au voisinage de  $+\infty$ .

b) Pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ; on a:

$$f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x} \quad \text{et comme } \ln x > 0 \text{ sur}$$

$$]1; +\infty[; \text{ donc: } (x \in ]1; +\infty[); f(x) - \ln x < 0$$

D'où (C) est au-dessous de  $\Gamma$  sur  $]1; +\infty[$ .

3) a) Soit  $\alpha \in ]1; +\infty[$ ; on a une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse  $\alpha$  est:

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

$$= f'(\alpha) \cdot x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$$

Donc cette tangente passe par l'origine ssi sa valeur à l'origine est nulle; d'où ssi:

$$f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$$

Soit  $g(x) = f(x) - x f'(x)$   
pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ .

b) on a:  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - x \left( \frac{1 + (\ln x)^2}{x (\ln x)^2} \right) = 0$$

une droite d'équation  $y = ax + b$  passe par l'origine ssi  $b = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{1 + (\ln x)^2}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln x)^3 - \ln x - (1 + (\ln x)^2)}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$$

Donc  $g(x) = 0$  et l'équation  $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$  admettent les mêmes solutions dans  $]1; +\infty[$ .

c) Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$u(t) = t^3 - t^2 - t - 1.$$

On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ;  $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$ .

$$= 3(t + \frac{1}{3})(t - 1)$$

Donc pour  $t > 0$  ; on a :

$u'(t)$  est du même signe que  $(t - 1)$   
d'où le signe de  $u'(t)$  sur  $]0; +\infty[$ .

|         | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------|---|---|-----------|
| $t-1$   | - | 0 | +         |
| $u'(t)$ | - | 0 | +         |

Tableau de variation de  $u$  sur  $]0; +\infty[$

| $t$     | 0  | 1  | $+\infty$ |
|---------|----|----|-----------|
| $u'(t)$ | -  | 0  | +         |
| $u(t)$  | -1 | -2 | $+\infty$ |

⑥ D'après le tableau de variation de  $u$   
la fonction  $u$  s'annule une et une seule fois  
sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

$$\text{donc } (\exists! t_1 \in ]1; +\infty[) / u(t_1) = 0.$$

$$\text{donc } (\exists! \alpha \in ]e; +\infty[) / g(\alpha) = 0.$$

$$(\text{avec } \alpha = \ln(t_1))$$

d'où il existe une unique  $\alpha$  dans  $]e; +\infty[$   
telle que la tangente  $T_\alpha$  à  $\bar{a}(C)$  au point  
d'abscisse  $\alpha$  passe par l'origine.

### Exercice 5

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad \text{pour } x \in ]0; +\infty[.$$

$$1. a) \text{ On a : } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$$

$$= -\infty.$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty)$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ limite usuelle du cours})$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

b)  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  (comme quotient  
de deux fonctions dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour  
tout  $x \in ]0; +\infty[$ ; on a :

$$f'(x) = \left( \frac{\ln x}{x} \right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Donc:  $(\forall x \in ]0; +\infty[)$  ;  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

g)  $f'(x)$  est du même signe que  $(1 - \ln x)$   
 donc :  $\begin{cases} f'(x) \leq 0 \text{ sur } [e; +\infty[ \\ f'(x) \geq 0 \text{ sur } ]0; e] \end{cases}$

D'où  $f$  est croissante sur  $]0; e]$  et  
 décroissante sur  $[e; +\infty[$ .

2.  $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$  ; pour  $x \in ]0; +\infty[$ .

a. On a : g)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$= +\infty$$

(Car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ )

Donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty}$

o)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \times \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

⑦ et en posant  $t = \sqrt{x}$ ; on a:  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$   
 d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ .

d'où  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}$

b)  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  (car la fonction  $x \mapsto x$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ ) et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ; on a:

$$g'(x) = \left( \frac{(\ln x)^2}{x} \right)' = \frac{(2 \times \frac{1}{x} \times \ln x) \times x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x \times (2 - \ln x)}{x^2}$$

Donc  $(\forall x \in ]0; +\infty[); g'(x) = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}$

c) D'après la question précédente le signe de  $g'(x)$  est celui de  $[(2 - \ln x) \ln x]$  sur  $]0; +\infty[$   
 d'où le tableau de signe de  $g'(x)$ .

| $x$         | 0 | 1 | $e^2$ | $+\infty$ |
|-------------|---|---|-------|-----------|
| $\ln x$     | - | 0 | +     |           |
| $2 - \ln x$ |   | + | 0     | -         |
| $g'(x)$     | - | 0 | +     | 0         |

Tableau de variation de  $g$

| $x$     | 0         | 1      | $e^2$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------|----------|-----------|
| $g'(x)$ |           | -      | +        | -         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $g(1)$ | $g(e^2)$ | 0         |

et  $g(1) = 0$  ;  $g(e^2) = \frac{4}{e^2}$

3) a) ~~Ces deux courbes~~ ont un point  $M$  est commun aux deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  si et seulement si sont ordonné  $y$  est égale à  $f(x)$  et à  $g(x)$  c'est à dire si et seulement si son abscisse est solution de l'équation  $f(x) = g(x)$  donc solution de l'équation :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{où } x \in ]0; +\infty[$$

d'où  $\ln x = (\ln x)^2$

donc  $(\ln x)^2 - \ln x = 0$

donc  $\ln x (\ln x - 1) = 0$

d'où  $\ln x = 0$  ou  $\ln x = 1$

donc  $x = 1$  ou  $x = e$

On conclut que  $(C_f)$  et  $(C_g)$  admettent deux points communs  $A(1; 0)$  et  $B(e; \frac{1}{e})$

⑧

b) Etudions le signe de  $f(x) - g(x)$

$$\text{on a: } f(x) - g(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} \\ = \frac{\ln x (1 - \ln x)}{x}$$

Donc  $f(x) - g(x)$  est du même signe que  $\ln x (1 - \ln x)$  car  $x > 0$ ; d'où le tableau de signe de  $f(x) - g(x)$

| $x$           | 0 | 1 | $e$ | $+\infty$ |
|---------------|---|---|-----|-----------|
| $\ln x$       | - | 0 | +   |           |
| $1 - \ln x$   |   | + | 0   | +         |
| $f(x) - g(x)$ | - | 0 | +   | -         |

Donc  $(C_f)$  est au-dessous de  $(C_g)$  sur chacun des intervalles  $]0; 1]$  et  $[e; +\infty[$  et  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  sur l'intervalle  $[1; e]$ .

### Exercice 6

$$f(x) = \ln(x^2 + 4)$$

1.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ; car  $x^2 + 4 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$   
 $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ; on a:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4)'}{\ln(x^2 + 4)} \\ = \frac{2x}{\ln(x^2 + 4)}$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2 + 4)}$$

Donc  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2.  $g(x) = f(x) - x$  ; pour  $x \in [0; +\infty[$

a) Pour tout  $x \in [0; +\infty[$  ; on a :

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= \frac{2x}{x^2+4} - 1$$

$$= \frac{2x - x^2 - 4}{x^2+4}$$

$$= -\frac{(x^2 - 2x + 4)}{x^2+4}$$

$$= -\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$$

Donc :  $(\forall x \in [0; +\infty[) ; g'(x) = -\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$

D'où  $(\forall x \in [0; +\infty[) ; g'(x) \leq 0$ .

Donc  $g$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$

b)  $g$  est continue sur  $[2; 3]$  et strictement croissante sur  $]2; 3[$  ; de plus on a :

$$g(2) = f(2) - 2$$

$$= \ln(8) - 2$$

$$= 3\ln 2 - 2 \quad \text{Donc } g(2) > 0$$

$$g(3) = f(3) - 3$$

$$= \ln(3^2+4) - 3$$

$$= \ln(13) - 3$$

Donc  $g(3) < 0$

D'où d'après TVI l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique dans  $]2; 3[$ .

③ Appliquant le principe de la dichotomie pour donner un encadrement à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}\text{on a: } g\left(\frac{3+2}{2}\right) &= g\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} \\ &= \ln\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4\right) - \frac{5}{2} \\ &= \ln\left(\frac{41}{4}\right) - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\text{donc } g\left(\frac{3+2}{2}\right) < 0$$

$$\text{et comme } g(2) > 0$$

$$\text{alors } \alpha \in ]2; \frac{5}{2}[$$

l'amplitude de cet intervalle est:

$$\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \approx 0,5$$

Alors on cherchera un encadrement plus fin; on a:

$$\begin{aligned}g\left(\frac{\frac{5}{2}+2}{2}\right) &= g\left(\frac{9}{4}\right) \\ &= f\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} \\ &= \ln\left(\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 4\right) - \frac{9}{4} \\ &= \ln\left(\frac{145}{16}\right) - \frac{9}{4}\end{aligned}$$

$$\text{donc } g\left(\frac{\frac{5}{2}+2}{2}\right) < 0 \text{ et } g(2) > 0$$

$$\text{d'où } \alpha \in ]2; \frac{9}{4}[$$

l'amplitude de l'intervalle  $]2; \frac{9}{4}[$  est,

$$\frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

Donc il faut encore affiner l'amplitude

$$\text{on a: } g\left(\frac{\frac{9}{4}+2}{2}\right) = g\left(\frac{17}{8}\right)$$

$$= f\left(\frac{17}{8}\right) - \frac{17}{8}$$

$$= \ln\left(\left(\frac{17}{8}\right)^2 + 4\right) - \frac{17}{8}$$

$$= \ln\left(\frac{545}{64}\right) - \frac{17}{8}$$

$$\text{Donc } g\left(\frac{\frac{9}{4}+2}{2}\right) > 0 \text{ et } g(3) < 0$$

Donc  $\alpha \in ]\frac{17}{8}; 3[$  et l'amplitude  
de cet intervalle est:  $3 - \frac{17}{8} = \frac{7}{8} \approx 0,1$ .

Donc une valeur approchée par défaut de  $\alpha$   
est  $\frac{17}{8}$ .

c) l'équation  $f(x) = x$  est équivalente à l'équation  
 $f(x) - x = 0$ ; donc à l'équation  $g(x) = 0$ .  
d'où  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  
 $f(x) = x$ .

Partie B

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(10)

3. a) Montrons par récurrence que :  
 $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq \alpha$ .

Initialisation

Pour  $n=0$  on a  $u_0 = 1$  donc  $1 \leq u_0 \leq \alpha$ .

Hérédité

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $1 \leq u_n \leq \alpha$  et  
 montrons que  $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

Par hypothèse de récurrence on a :

$1 \leq u_n \leq \alpha$  et comme  $f$  est strictement  
 croissante sur  $[0; +\infty[$ ; donc :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \quad \text{et} \quad f(1) \geq 1; f(\alpha) = \alpha$$

$$\text{donc} \quad 1 \leq f(1) \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

$$\text{d'où} \quad 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

Conclusion

$1 \leq u_n \leq \alpha$ ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b) D'après ce qui précède la fonction

$g: x \mapsto f(x) - x$  est décroissante  
 sur  $[0; +\infty[$ ; donc  $g([1; \alpha]) = [g(\alpha); g(1)]$

$$g([1; \alpha]) = [g(\alpha); g(1)] \\ = [0; \alpha - 1]$$

D'où  $(\forall x \in [1; \alpha]); g(x) = f(x) - x \geq 0$

en particulier si on prend  $x = u_n$   
on obtient  $f(u_n) - u_n \geq 0$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

D'où  $(u_n)$  est une suite croissante  
et comme elle est majorée par  $\alpha$  alors  
elle est convergente.

c) Posons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

alors  $l$  est solution de l'équation  
 $f(x) = x$ ; et comme d'après la question  
partie A; 2)c) ~~cette~~ cet équation admet  
une unique solution  $\alpha$ ; on conclut  
que:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .

