Examen Nat Sc Eco 2016 Sess norm

EX1 (4,5 pts)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 1 \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1- Calculer U_1 et U_2

2- a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN) \quad U_n < \frac{5}{3}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN) \quad U_n > -1$

3- a) Montrer que $(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{5}\left(U_n - \frac{5}{3}\right)$

b) Déduire que la suite (U_n) est croissante et qu'elle est convergente

4- on pose : $V_n = U_n - \frac{5}{3} \quad (\forall n \in IN)$

a) Calculer V_0

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

c) Ecrire V_n en fonction de n ; puis déduire que : $(\forall n \in IN) \quad U_n = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)^n + \frac{5}{3}$ 5

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

Ex 2 : (4,5 pts) (Donner tous les résultats sous forme de fractions)

Une caisse contient 7 boules indiscernables au toucher, 2 boules Blanches, 3 boules Rouges et 2 boules Vertes.

On tire de façon aléatoire et simultanément 2 boules de la caisse.

On considère les événements suivants :

A : «Les 2 boules tirées sont de même couleur »

B : « Parmi les boules tirées au moins une est rouge »

1- a) Montrer que la probabilité de l'événement A est $P(A) = \frac{5}{21}$

b) Calculer $P(B)$

c) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$

d) Est-ce que les deux événements A et B sont indépendants ? Justifier votre réponse.

2- Soit X la variable aléatoire liée au nombre de boules tirées

1- Compléter le tableau ci-dessous en justifiant votre réponse

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$			

2- Calculer E(X) l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

<u>Ex 3 :</u> (11 pts)

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$

1- a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

2- a) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}$

b) Etudier le signe de $g'(x)$

c) Calculer g(1) puis dresser le tableau de variation de g sur $]0,+\infty[$

d) Déduire de ce tableau que :

- $g(x)\ \leq 0$ sur $]0,1]$
- $g(x)\ \geq 0$ sur $[1,+\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{1}{x}+x\ln x$; et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique au résultat.

2- a) Montrer que : $f'(x)=g(x)$ $(\forall x\in]0,+\infty[)$

b) Calculer f(1) puis dresser le tableau de variation de *f* sur $]0,+\infty[$

3- On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=-\dfrac{x^2}{4}+\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)\ln x$

Montrer que F est une primitive de *f* sur $]0,+\infty[$

4-Le graphe ci-dessous (C) est la courbe de *f* et (Δ) est la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}$

Calculer l'aire de la partie hachurée .