

guessmaths

Correction examen nationale 2011 Session de Rattrapage
2^{ème} Bac SM A et B

Exercice 1 :

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]0, 1[$ on pose : $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

1- a) Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans I

Soient x et y deux éléments de $I =]0, 1[$; on a :

$$\begin{cases} (1-x)(1-y) > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow xy + (1-x)(1-y) > xy$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{xy + (1-x)(1-y)} < \frac{1}{xy}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < x * y < 1$$

Donc $(x * y) \in I$

D'où $*$ est une loi de composition interne dans I

b) Montrons que la loi $*$ est commutative et associative.

Soient x ; y et z des éléments de $I =]0, 1[$; on a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x * y &= \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} \\ &= \frac{yx}{yx + (1-y)(1-x)} \\ &= y * x \end{aligned}$$

Donc la loi $*$ est commutative

$$\begin{aligned} \bullet \quad x * (y * z) &= \frac{x(y * z)}{x(y * z) + (1-x)(1-(y * z))} \\ &= \frac{x \times \frac{yz}{yz + (1-y)(1-z)}}{x \times \frac{yz}{yz + (1-y)(1-z)} + (1-x) \left(1 - \frac{yz}{yz + (1-y)(1-z)} \right)} \\ &= \frac{\frac{xyz}{yz + (1-y)(1-z)}}{\frac{xyz}{yz + (1-y)(1-z)} + (1-x) \left(\frac{yz + (1-y)(1-z) - yz}{yz + (1-y)(1-z)} \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

D'autre part : $(x * y) * z = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} * z$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} \times z}{\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} \times z + \left(1 - \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}\right)(1-z)} \\ &= \frac{\frac{xyz}{xy + (1-x)(1-y)}}{\frac{xyz}{xy + (1-x)(1-y)} + \left(\frac{xy + (1-x)(1-y) - xy}{xy + (1-x)(1-y)}\right)(1-z)} \\ &= \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)} \end{aligned}$$

D'où $(x * y) * z = x * (y * z)$

Donc la loi $*$ est associative.

c) Montrons que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

Cherchons si il existe un élément e de I qui vérifie : $x * e = x$; pour tout x de I .

$$\begin{aligned} \text{On a : } x * e = x &\Leftrightarrow \frac{ex}{ex + (1-x)(1-e)} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{e}{ex + (1-x)(1-e)} = 1 \quad (\text{car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow ex + (1-x)(1-e) = e \\ &\Leftrightarrow ex + 1 - e - x + ex = e \\ &\Leftrightarrow (2e - 1)x + 1 - 2e = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2e = 0 \\ &\Leftrightarrow e = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $(I, *)$ admet un élément neutre $e = \frac{1}{2}$

2-Montrons que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

- Soit x un élément de I ; cherchons si il existe x' de I symétrique de x .

$$\begin{aligned} \text{On a : } x * x' &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{xx'}{xx' + (1-x)(1-x')} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2xx' = xx' + (1-x)(1-x') \\ &\Leftrightarrow xx' - (1-x)(1-x') = 0 \\ &\Leftrightarrow xx' - 1 + x' + x - xx' = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x' = 1 - x \quad \text{et} \quad (1 - x) \in I$$

Donc tout élément x de I admet un symétrique $x' = 1 - x$ dans $(I, *)$.

On a : • $*$ est une loi de composition interne commutative et associative dans I

• $*$ admet un élément neutre $e = \frac{1}{2}$ dans I

• Tout élément de I admet un symétrique dans I pour la loi $*$

Donc $(I, *)$ est un groupe commutatif.

3-On considère les deux ensembles $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$

a) Montrons que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

• H est une partie de $\mathbb{R}_+^*$ et $H \neq \emptyset$ (car $2 \in H$)

• Soient x et y deux éléments de H ; donc :

$$\exists (n; m) \in \mathbb{Z}^2 / x = 2^n \quad \text{et} \quad y = 2^m$$

$$\text{D'où } \frac{x}{y} = 2^{n-m} \quad \text{et} \quad (n-m) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } \frac{x}{y} \in H$$

Par suite H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

$$H \rightarrow I$$

b) On considère l'application : $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Montrons que φ est un homomorphisme de $(H, \times)$ vers $(I, *)$

$$\begin{aligned} \text{Soient } x = 2^n \quad \text{et} \quad y = 2^m \quad \text{deux éléments de } H; \text{ on a : } \varphi(x \times y) &= \varphi(2^n \times 2^m) \\ &= \varphi(2^{n+m}) \\ &= \frac{1}{1+2^{n+m}} \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part : } \varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(2^n) * \varphi(2^m)$$

$$= \frac{1}{1+2^n} * \frac{1}{1+2^m}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{1+2^n} \times \frac{1}{1+2^m}}{\frac{1}{1+2^n} \times \frac{1}{1+2^m} + \left(1 - \frac{1}{1+2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2^m}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+2^n)(1+2^m)} \\
&= \frac{1}{(1+2^n)(1+2^m)} + \left(\frac{1+2^n-1}{1+2^n} \right) \left(\frac{1+2^m-1}{1+2^m} \right) \\
&= \frac{1}{(1+2^n)(1+2^m)} \\
&= \frac{1+2^n 2^m}{(1+2^n)(1+2^m)} \\
&= \frac{1}{1+2^{n+m}} \\
&= \varphi(x \times y)
\end{aligned}$$

Donc pour tout x et y de H on a : $\varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(x \times y)$

D'où φ est un homomorphisme de $(H, \times)$ vers $(I, *)$

c) On a : pour tout $2^n \in H$; $\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n}$

Donc $\varphi(2^n) \in K$; alors $\varphi(H) \subset K$

Et tout élément de K s'écrit $\frac{1}{1+2^n} (n \in \mathbb{Z})$; égale à $\varphi(2^n)$ où $2^n \in H$; alors

$$K \subset \varphi(H)$$

$$\text{Par suite } K = \varphi(H)$$

Et comme φ est un homomorphisme de $(H, \times)$ vers $(I, *)$

Alors $\varphi(H)$ est un sous-groupe de $(I, *)$

Donc K est un sous-groupe de $(I, *)$

Exercice 2: (2.5 points)

Soit x un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2 \pmod{19}$

1- a) Soit x un réel qui vérifie : $10^x \equiv 2 \pmod{19} \Rightarrow 10^{x+1} \equiv 20 \pmod{19}$
 $\Rightarrow 10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$

b) Montrons que : $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$

19 est un nombre premier ; donc d'après le petit théorème de FERMAT on a :

$$10^{19} \equiv 10 \pmod{19}$$

$$\text{De plus on a : } 10 \wedge 19 = 1 ; \text{ alors : } 10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$$

2- Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$

a) Montrons que : $10^d \equiv 1 \pmod{19}$

$$\text{On a : } d = 18 \wedge (x+1) ; \text{ donc } (\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2) / d = 18 \times u + (x+1) \times v$$

$$\text{De plus : } 10^{18} \equiv 1 \pmod{19} \text{ et } 10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$$

Pour le signe de u et v on est en présence de quatre cas :

- u et v tous les deux négatives ce qui est absurde car $d = 18 \times u + (x+1) \times v$ est positive.

- u positive et v négative

$$d = 18 \times u + (x+1) \times v \Rightarrow 18 \times u = d + (x+1) \times (-v)$$

$$\text{Donc } 10^{18 \times u} \equiv 1 [19] \Rightarrow 10^{d+(x+1) \times (-v)} \equiv 1 [19] \text{ et } 10^{(x+1) \times (-v)} \equiv 1 [19]$$

$$\text{D'où } 10^d \equiv 1 [19]$$

- u négative et v positive

$$d = 18 \times u + (x+1) \times v \Rightarrow (x+1) \times v = d + 18 \times (-u)$$

$$\text{Donc } 10^{(x+1) \times v} \equiv 1 [19] \Rightarrow 10^{d+18 \times (-u)} \equiv 1 [19] \text{ et } 10^{18 \times (-u)} \equiv 1 [19]$$

$$\text{D'où } 10^d \equiv 1 [19]$$

b) Montrons que : $d = 18$

d divise 18 donc $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

$$10^1 \equiv 10 [19]$$

$$10^2 \equiv 5 [19]$$

$$10^3 \equiv 12 [19]$$

$$10^6 \equiv 11 [19]$$

$$10^9 \equiv 11 [19]$$

$$\text{Et on a : } 10^{18} \equiv 1 [19]$$

$$\text{D'où } d = 18$$

c) d divise $x+1$; donc $18 \mid x+1 \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x+1 = 18k$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = -1 + 18k$$

$$\Rightarrow x \equiv -1 [18]$$

$$\Rightarrow x \equiv 17 [18]$$

Exercice 3 :

Première partie :

On considère dans l'ensemble l'équation : $(E) : z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

1- On a :

$$\begin{aligned} (-2i)^3 - (1+2i)(-2i)^2 + 3(1+i)(-2i) - 10(1+i) &= 8i + 4(1+2i) - 6i + 6 - 10 - 10i \\ &= 16i - 16i + 10 - 10 = 0 \end{aligned}$$

Donc $-2i$ est une solution de l'équation (E)

2- Déterminons les deux nombres complexes α et β tels que : $(\forall z \in \mathbb{Z})$

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$\text{On a : } (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 2iz^2 + 2\alpha iz + 2\beta i$$

$$= z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2\alpha i)z + 2\beta i$$

Donc par identification on obtient :

$$\begin{cases} \alpha + 2i = -(1+2i) \\ \beta + 2\alpha i = 3(1+i) \\ 2\beta i = -10(1+i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - 4i \\ \beta + 2\alpha i = 3(1+i) \\ \beta = \frac{-10(1+i)}{2i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - 4i \\ \beta = \frac{-5-5i}{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - 4i \\ \beta = \frac{i^2(5+5i)}{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - 4i \\ \beta = -5 + 5i \end{cases}$$

3- a) Déterminons les deux racines carrées du nombre $5-12i$

Soient x et y deux réels tels que :

$$(x+iy)^2 = 5-12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 5-12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$$

Et on a : $|x+iy|^2 = |5-12i| \Rightarrow x^2 + y^2 = 13$

D'où $(x+iy)^2 = 5-12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Donc les deux racines carrées du nombre $5-12i$ sont $a_1 = 3-2i$ et $a_2 = -3+2i$

b) $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

$$\Leftrightarrow (z+2i)(z^2 - (1+4i)z + (-5+5i)) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2i \text{ ou } z^2 - (1+4i)z + (-5+5i) = 0$$

Réolvons l'équation (E') : $z^2 - (1+4i)z + (-5+5i) = 0$

Le discriminant réduit de (E') est :

$$\delta^2 = (1+4i)^2 - 4(-5+5i) = 1+8i-16+20-20i = 5-12i$$

Et les racines de $5-12i$ sont $(3-2i)$ et $(-3+2i)$

D'où les solutions de (E') sont : $z_1 = \frac{1+4i+(3-2i)}{2}$ et $z_2 = \frac{1+4i+(-3+2i)}{2}$
 $z_1 = 2+i$ et $z_2 = -1+3i$

Donc $S = \{-2i; 2+i; -1+3i\}$

Deuxième partie :

Soient les points A et B et C d'affixes respectifs $a = -1+3i$; $b = -2i$ et $c = 2+i$

1- Montrons que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

On a : $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) [2\pi]$

Et $\frac{c-b}{c-a} = \frac{2+i+2i}{2+i+1-3i}$
 $= \frac{2+3i}{3-2i}$
 $= \frac{(3-2i)i}{3-2i} = i$

On a : $\begin{cases} \frac{c-b}{c-a} = i \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-b}{c-a}\right| = 1 \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} |c-b| = |c-a| \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} BC = AC \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

2-On considère la rotation R_1 de centre B et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{3}$ et la

rotation R_2 de centre A et dont une mesure de l'angle est $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Soit M un point du plan complexe d'affixe z et M_1 son image par la rotation R_1 et M_2 son image par la rotation R_2 .

a) Vérifions que l'expression complexe de la rotation R_1 est : $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$

On a : $M'(z') = R_1(M(z)) \Leftrightarrow (z' - b) = (z - b)e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z' = (z + 2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 2i$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z + i - \sqrt{3} - 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z - i - \sqrt{3}$$

Donc l'expression complexe de la rotation R_1 est : $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i$

b) Déterminons z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z .

$$\text{On a : } M_2(z_2) = R_2(M(z)) \Leftrightarrow (z_2 - a) = (z - a) e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = (z + 1 - 3i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - 1 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z + (1 - 3i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - (1 - 3i)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z + (1 - 3i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z + (1 - 3i) \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Donc } z_2 = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - (1 - 3i) \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$c) z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - (1 - 3i) \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Donc } z_1 + z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - (1 - 3i) \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -\sqrt{3} - i - (1 - 3i) \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -\sqrt{3} - i - \frac{3+i\sqrt{3}}{2} - 3i \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -\sqrt{3} - i - \frac{3+i\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{9i - 3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -\sqrt{3} - \frac{3}{2} - i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{9i}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3} + 11}{2} \right) i$$

Donc pour tout $M(z)$ le point I , le milieu du segment $[M_1 M_2]$, est un point fixe.

Exercice 4: (6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$

- 1- On a :
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x) = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$)
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) = -\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \ln x}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 1$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x - x)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

2- a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$;

et pour tout $x \in]0; +\infty[$; on a : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$; d'où :

Tableau de variations de la fonction f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

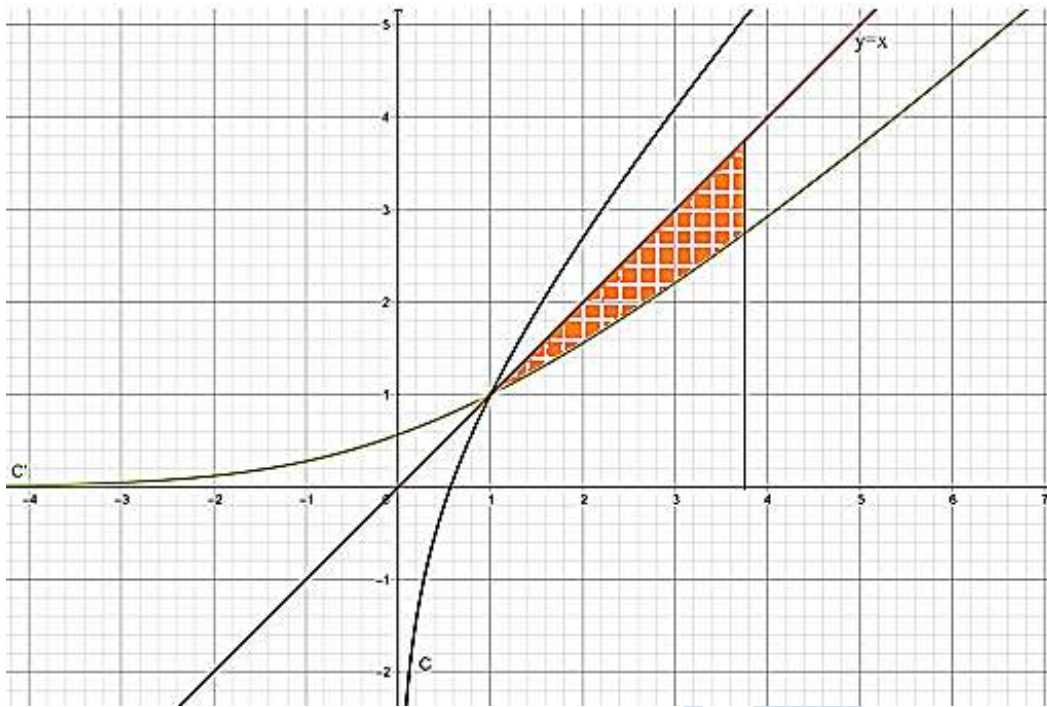
b) La fonction f est continue et strictement croissante ; donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $J = f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$

Tableau de variations de la fonction f^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$		+
$f^{-1}(x)$	0	$+\infty$

3- $f(1) = 1$ et $f(e) = e + 1$

Construire (C) et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$



4- a) Calculons l'intégrale $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$

On posera : $t = f^{-1}(x)$; donc $x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t) dt$

$$\text{D'où } \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_1^e t f'(t) dt$$

En utilise une intégration par parties

$$\text{On pose : } \begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v' = f'(t) & v = f(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_1^e t f'(t) dt &= [t f(t)]_1^e - \int_1^e f(t) dt \\ &= e(e+1) - 1 - \int_1^e (t + \ln t) dt \\ &= e^2 + e - 1 - \int_1^e t dt - \int_1^e \ln t dt \\ &= e^2 + e - 1 - \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \ln t dt \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } (t \ln t - t)' = \ln t$$

$$\text{Donc } \int_1^e \ln t dt = [t \ln t - t]_1^e = 1$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_1^e t f'(t) dt &= \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2} - \int_1^e \ln t dt \\ &= \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \frac{e^2 + 2e - 3}{2}$$

b) Soit A l'aire du domaine plan limité par (C') et les droites d'équations : $x = 1$;

$$x = e + 1 \text{ et } y = x$$

$$A = \int_1^{e+1} |f^{-1}(x) - x| dx \quad (\text{en unité d'aire})$$

Sur l'intervalle $[1; e + 1]$; (C') est au dessous de la droite d'équation $y = x$; donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{e+1} (x - f^{-1}(x)) dx \\ &= \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right) \\ &= \frac{(e+1)^2}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right) \\ &= \frac{e^2 + 2e - e^2 - 2e + 3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A = \frac{3}{2} \text{ cm}^2$$

5- Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'équation : $(E_n) : x + \ln x = n$

a) Montrons que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n .

$$(E_n) : x + \ln x = n \Leftrightarrow f(x) = n$$

La fonction f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$; donc l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique x_n ; par suite l'équation (E_n) admet une solution unique x_n dans $]0; +\infty[$

$$b) \bullet (E_1) : x + \ln x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{car } f \text{ est une bijection et } f(1) = 1)$$

$$\text{Donc } x_1 = 1$$

$$\bullet \text{ Soit } A \in \mathbb{R}_+^* ; \text{ on a : } f(x_n) = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$$

Donc en appliquant la définition de la limite ; on a :

$$(\forall B \in \mathbb{R}_+^*) (\exists N \in \mathbb{N}^*) : n \geq N \Rightarrow f(x_n) \geq B$$

$$\text{On prend } B = f(A + 1) > 0$$

(car f est strictement croissante et $A + 1 > 1$; $f(1) = 1$)

$$\text{D'où } x_n \geq A + 1 \Rightarrow x_n \geq A$$

$$\text{Donc } (\forall A \in \mathbb{R}_+^*) (\exists N \in \mathbb{N}^*) : n \geq N \Rightarrow x_n \geq A$$

$$\text{Par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

6- a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) \leq f(n)$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln n \geq 0 \Rightarrow n + \ln n \geq n$

$\Rightarrow f(n + \ln n) \geq f(n)$ (car f est strictement croissante)

$\Rightarrow f(n) \geq f(x_n)$

$\Rightarrow f(x_n) \leq f(n)$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) \leq f(n)$

Comme f est strictement croissante ; on en déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n \leq n$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln(n) \leq x_n$

Pour tout $n > 0$; on a : $0 < x_n \leq n \Rightarrow \ln(x_n) \leq \ln(n)$

$\Rightarrow x_n + \ln(x_n) \leq x_n + \ln(n)$

$\Rightarrow f(x_n) \leq x_n + \ln(n)$

$\Rightarrow n \leq x_n + \ln(n)$

$\Rightarrow n - \ln(n) \leq x_n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln(n) \leq x_n$

c) Pour tout $n > 0$; on a : •
$$\begin{cases} n - \ln(n) \leq x_n \\ x_n \leq n \end{cases} \Rightarrow -\frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{x_n - n}{n} \leq 0$$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(n)}{n} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0$

$$\begin{aligned} \bullet (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{x_n}{n - \ln(n)} &= \frac{x_n - n}{n - \ln(n)} + \frac{n}{n - \ln(n)} \\ &= \frac{x_n - n}{n} \times \frac{n}{n - \ln(n)} + \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n}} \\ &= \frac{x_n - n}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n}} + \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n}} \\ &= \left(\frac{x_n - n}{n} + 1 \right) \times \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n}} \end{aligned}$$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)} = 1$$

Exercice 5 : (4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique définie sur par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

1-Montrons que pour $n \geq 2$ il existe un réel unique α_n de l'intervalle $]0,1[$ tel que :

$$f_n(\alpha_n) = 0$$

Soit $n \geq 2$; on a :

- f_n est continue sur $[0,1]$
- f_n est dérivable sur $]0,1[$; et pour tout $(x \in]0,1[)$; on a :

$$f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$$

Donc f_n est strictement croissante sur $]0,1[$

- $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 0$; d'où $f_n(0) \times f_n(1) < 0$

Donc d'après TVI il existe un réel unique α_n de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

2-Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\forall x \in]0,1[) ; f_{n+1}(x) &= -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

$$\text{Comme } (\alpha_{n+1} \in]0,1[) ; \text{ alors } f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1}) \text{ et } f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$$

$$\text{On en déduit que pour } n \geq 2 : f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$$

$$\text{Donc } f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$$

$$\text{Et } f_n \text{ est strictement croissante sur }]0,1[; \text{ alors } \alpha_n > \alpha_{n+1}$$

D'où la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

$$3- \text{ On pose : } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$$

a) pour $t \neq 1$; $(1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1})$ est la somme d'une suite géométrique de raison

$$\begin{aligned} q = t ; \text{ donc } 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} &= \frac{1 - t^n}{1 - t} \\ &= \frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t} \end{aligned}$$

b) On a : $\alpha_n \in]0,1[$; donc $\alpha_n \neq 1$; d'après la question précédente

$$1+t+t^2+\dots+t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \Rightarrow \int_0^{\alpha_n} (1+t+t^2+\dots+t^{n-1}) dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\Rightarrow \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$$

Donc pour $n \geq 2$; on a : $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

4- a) Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; 1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

On sait que : $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$ et

$$f(\alpha_n) = 0 = -1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} \Rightarrow \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 1$$

$$D'où $1 = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \Rightarrow 1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$$$

Donc $(\forall n \geq 2) ; 1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

b) Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

Soit $n \geq 2$; on a : $0 \leq t \leq \alpha_n \Rightarrow -1 \leq t-1 \leq \alpha_n-1$

$$\Rightarrow 1-\alpha_n \leq 1-t \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-\alpha_n} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \times \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \times \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}$$

Et $\alpha_n \in]0,1[\Rightarrow \alpha_n^{n+1} < 1$

$$\text{Donc } \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$$

$$c) \text{ On a : } \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

$$\text{Comme pour } n \geq 2 ; 1 + \ln(1-\alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \ln(1-\alpha_n) = 0$$

$$\text{D'autre part } (\forall n \geq 2) ; \alpha_n \in]0,1[\Rightarrow l \in [0,1]$$

$$\text{Et } (\alpha_n)_{n \geq 2} \text{ est strictement décroissante ; d'où } l \leq \alpha_2 < 1 \Rightarrow l \in [0,1[$$

$$\text{La fonction } x \mapsto 1 + \ln(1-x) \text{ est continue sur } [0,1[$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \ln(1-\alpha_n) = 1 + \ln(1-l) \Rightarrow 1 + \ln(1-l) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \ln(1-l) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(1-l) = -1$$

$$\Rightarrow \ln(1-l) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow 1-l = e^{-1}$$

$$\Rightarrow l = 1 - e^{-1}$$