

guessmaths

**Série n° 4 d'exercices sur « étude de fonctions logarithmes » Terminale S**

**Exercice 1**

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln(x+1) - \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$$

Calculer  $g(0)$  et en déduire que sur  $\mathbb{R}^+ : \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b. Par une étude analogue, montrer que si  $x \in \mathbb{R}^+ \text{ alors } : \ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2}$

c. Établir que pour tout  $x$  strictement positif on a :  $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

En déduire que  $f$  est dérivable en zéro et que  $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3. a. Soit / la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$ .

Étudier le sens de variation de  $h$  sur  $[0; +\infty[$  ; puis déduire son signe.

b. Montrer que sur  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  en précisant la limite de  $f$  en  $+\infty$

d. On désigne par  $C$  la représentation graphique de  $f$ .

Construire la tangente  $T$  à  $C$  au point d'abscisse 0.

Montrer que  $C$  admet une asymptote à préciser. Tracer la courbe  $C$ .

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  ; (donnée ci-dessous)

### Partie A:

Étude de certaines propriétés de la courbe

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]-1; +\infty[$ .

2. Pour tout  $x$  de l'intervalle  $]-1; +\infty[$ , on pose :  $H(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$ .

Calculer  $H(0)$ . En déduire les variations de  $f$ .

3. Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x$ .

Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe et de la droite  $\mathcal{D}$ .

### Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction $f$

1. Démontrer que si  $x \in [0; 4]$ , alors  $f(x) \in [0; 4]$ .

2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a. Sur le graphique ci-dessous, en utilisant la courbe et la droite  $\mathcal{D}$ , placer les points de d'abscisses  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .

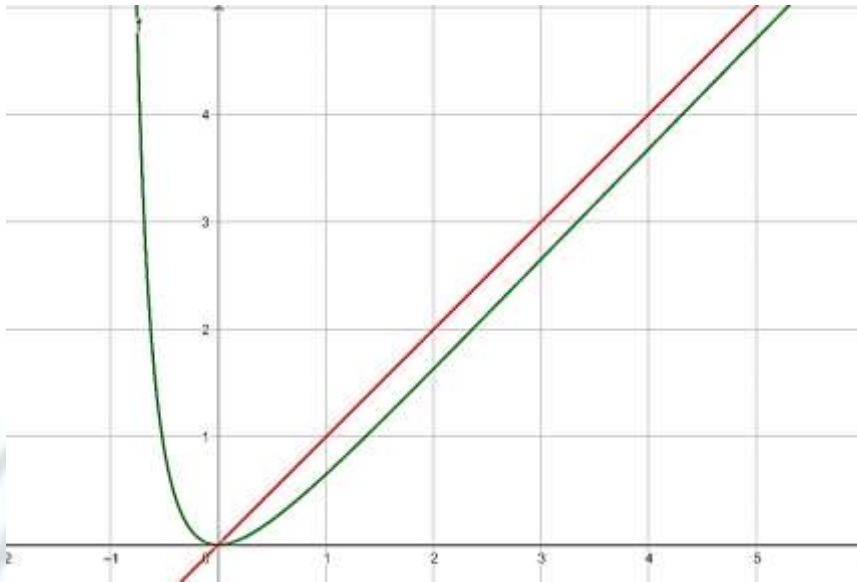
b. Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $u_n \in [0; 4]$ .

c. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

d. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

On désigne par  $\ell$  sa limite.

e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de  $\ell$ .



### Exercice 3

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

1. a. Déterminer les limites de la fonction  $f$  à droite en 1 et en  $+\infty$ .
- b. Étudier les variations de la fonction  $f$ .

2. Soit  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a. On a tracé la courbe représentative de la fonction  $f$  et la droite d'équation  $y = x$  sur la figure donnée ci-dessous. ; construire les points  $M_1$  et  $M_2$  de la courbe d'abscisses respectives  $u_1$  et  $u_2$ .

Proposer une conjecture sur le comportement de la suite  $(u_n)$ .

b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq e$

(on pourra utiliser la question 1. b.).

c. Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel de l'intervalle  $[e; +\infty[$ .

### **Partie B**

On rappelle que la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite  $(f(u_n))$ , démontrer que  $f(\ell) = \ell$ .
2. En déduire la valeur de  $\ell$ .

