

EXERCICE 1 : (4 Pts)

Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + \frac{6}{5} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que: $U_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que : $U_{n+1} - U_n = \frac{-3}{5}(U_n - 2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que (U_n) est décroissante ; en déduire que (U_n) est convergente

2) La suite (V_n) est définie par : $V_n = U_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

b) Exprimer V_n en fonction de n et montrer que $U_n = 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Montrer que: $S_n = 2n + \frac{11}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

Exercice 2 : (2,5pts)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 - 6X + 8 = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

2) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation : $\ln(x) + \ln(x+3) \geq \ln(x^2 + 6)$

EXERCICE 3 : (2,5pts)

1) Montrer que $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis

calculer : $\int_0^1 xe^x dx$

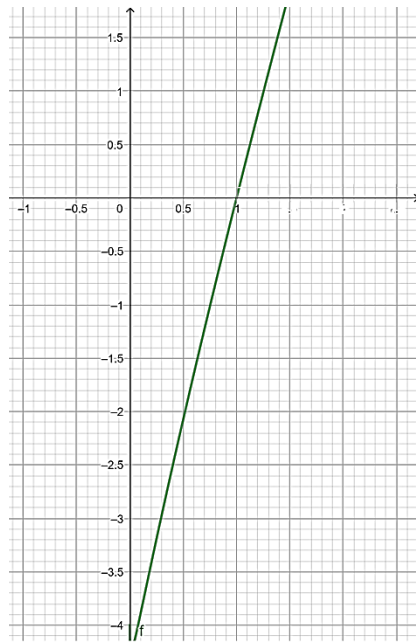
2) En utilisant l'intégration par parties, Calculer : $J = \int_0^1 x^2 e^x dx$

EXERCICE 4 : (11pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - 4 + \sqrt{x}(2 + \ln x)$

Et soit (C_g) la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé (voir la figure)

1) Calculer $g(1)$



2) A partir de la courbe de la fonction g déterminer le signe de $g(x)$.

II- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + (\sqrt{x} - 2)\ln x$

Et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat.

2) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - 2)\ln x}{x} = 0$ (on pose $t = \sqrt{x}$) ; puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$; interpréter le résultat.

3) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x}$; pour tout $x \in]0; +\infty[$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Déterminer l'intersection de la courbe (C_f) avec la droite (Δ) d'équation $y = x$ et montrer que (C_f) est au-dessous de la droite (Δ) sur $]1; 4[$ et au-dessus de la droite (Δ) sur $]0; 1[$ et $]4; +\infty[$

5) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6) Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $[1; +\infty[$

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 4 puis calculer $(h^{-1})'(4)$

WWW.GUESMATHS.CO