Proposition- Fonction propositionnelle

Exercice n°1

1. Donner une Proposition vraie
2. Donner une proposition fausse
3. $F(x):"(x\in\mathbb{R})/x^2-3x+7=0"$ à partir de cette fonction propositionnelle, donner deux Propositions fausses et deux Propositions vraies.

Exercice n°2

Déterminer la valeur de vérité de chaqu'une des Propositions suivantes:

1. $P_1:"(\exists x\in\mathbb{R})/x^2+x+1=0"$
2. $P_2:"(\forall x\in\mathbb{R})/x^2+x+1\geq 0"$
3. $P_3:"(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})/x\leq y"$
4. $P_4:"(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x\leq y"$
5. $P_5:"(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x\leq y"$
6. $P_6:"(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})/x^2y^2>xy"$

Les opérations sur les Propositions

Exercice n°3

Déterminer la négation de chaqu'une des Propositions suivantes:

1. $P_1:"(\forall x\in\mathbb{R})(x\geq 0\,ou\,x\leq 0)"$
2. $P_2:"\exists x\in\mathbb{N}/x^2+1>x"$
3. $P_3:"(\forall x\in\mathbb{R})(\exists a\in\mathbb{R})/x<a<x+1"$
4. $P_4:"(\exists x\in\mathbb{R})(\exists r\in\mathbb{R})/x-r=x=x+r"$

Exercice n°4

Donner la négation de chaqu'une des Propositions suivantes et déterminer sa valeur de vérité:

1. $P_1:"(\forall x\in\mathbb{R});(x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z})"$
2. $P_2:"(\exists! k\in\mathbb{Z})/-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi"$
3. $P_3:"(\forall x\in\mathbb{N}^*);(x\neq 1\Rightarrow x>1)"$

4. $P_4 : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / y^2 - xy - 1 = 0"$

Exercice n°5

En utilisant le raisonnement par un contre-exemple, montrer que les Propositions suivantes sont fausses:

1. $P_1 : "(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / 2x - 4y \neq 5"$
2. $P_2 : "(\forall x \in \mathbb{R}^*);(x + \frac{1}{x} \geq 2)"$
3. $P_3 : "(\forall x \in]0;1[);\frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1"$

Exercice n°6

Soient $(x;y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ *deux nombres réels non nuls, P et Q sont deux Propositions tels que:*

$(P) : 2x + 4y = 1$ et $(Q) : \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20$

Montrer que: $P \Rightarrow Q$

Lois logiques et méthode de raisonnement

Exercice n°7

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \overline{\left((A et \overline{B}) ou \ (\overline{A} et \ B)\right)}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B})$$

$$(A \Rightarrow (B \, ou \, \overline{C})) \Leftrightarrow (B \, ou \ (A \Rightarrow \overline{C}))$$

Exercice n°8

En utilisant le raisonnement par l'absurde montrer que:

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2. *en déduire :* $\sqrt{3} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice n°9

ABC est un triangle dont les longueurs des côtés sont: 6a ; 3a et 4a ($a > 0$ *).*
Montrer que ABC n'est pas triangle rectangle.

Exercice n°10

En utilisant le raisonnement par disjonction des cas, résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes:*

✠ $\sqrt{x-1} \geq x-4$

✠ $\sqrt{x^2-5x+6} \leq 2x-3$

Exercice n°11

En utilisant le raisonnement par les équivalences successives Montrer que:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right); 0 \leq \frac{x}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{3}$$

$$\left(\forall a \, et \, b \in]-1;1[\right); -1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$$

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right); \sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Exercice n°12

En utilisant le raisonnement par récurrence, Montrer que:

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); 1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice n°13

Montrer que:

$(\forall n \in \mathbb{N}); (4^n + 6n - 1$ *est divisible par 9)*

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); (3^{2n} + 2^{6n-5}$ *est divisible par 11)*