

الصفحة	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا المسالك الدولية الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع -		الجمهورية المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات
1	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS		RS 24F
4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (4) pages numérotées de 1/4 à 4/4
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices :**
 - **EXERCICE1** qui concerne l'arithmétique (au choix).....3.5 points
 - **ou bien**
 - **EXERCICE2** qui concerne les structures algébriques (au choix)...3.5 points
 - **EXERCICE3** qui concerne les nombres complexes (obligatoire)....3.5 points
 - **EXERCICE4** qui concerne l'analyse (obligatoire).....13 points

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisis de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2

Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

EXERCICE1 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE1 il ne faut pas traiter EXERCICE2

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

0.5 1-a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 b) En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et que $9^q \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 2-a) Montrer que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

0.5 b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$

0.5 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$

الصفحة	2	RS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	*
4				

0.5 b) En déduire que : $q = 5$

EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE2 il ne faut pas traiter EXERCICE1

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$

est un anneau non commutatif unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble : $E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Première partie :

0.25 1- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0.5 b) Déterminer une base de $(E, +, \cdot)$

0.25 2- a) Vérifier que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 ; M(x, y, z) \times M(x', y', z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$$

0.5 b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif

Deuxième partie :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme $M(x, y, 0)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 1- Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E, +)$

2- On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \varphi(x + iy) = M(x, y, 0)$$

0.25 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$

0.5 b) En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif. (F^* désigne $F - \{O\}$)

0.5 c) Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 3- a) Vérifier que : $(\forall M(x, y, 0) \in F) ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x, y, 0) = O$

0.25 b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

الصفحة	3	RS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	*
4				

EXERCICE3 : (3.5 points/obligatoire)

I- Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad (F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$$

- 0.5 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
- 0.25 2- a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- 0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$

Soient Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$

La rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, La rotation de centre A' et

d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$ et La rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

transforme O en $R(r)$

- 1.5 1- Montrer que : $p = -1 + m$, $q = \frac{1-i}{2}(-1-im)$ et $r = \bar{q}$
- 0.25 2- a) Vérifier que : $q - r = -ip$
- 0.5 b) En déduire que : $OP = QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

EXERCICE4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ par $f(x) = x \ln(2-x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 0.75 1-a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I ; f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$
- 0.5 b) Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I
- 0.75 c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$
- 0.75 2-a) Etudier les variations de f , puis donner son tableau de variations.
- 0.5 b) Montrer que la courbe (C) est concave.
- 0.5 c) Montrer que : $(\forall t \in I), (\forall x \in I); f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$

الصفحة	RS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	*
4	4		

- 0.5 d) En déduire que : $(\forall x \in I); f(x) \leq x \ln 2$ et $f(x) \leq -x + 1$
- 0.5 3- Représenter la courbe (C) (On prendra : $\|i\| = 2cm$)
- 0.75 4- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

Deuxième partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I = [0,1]$ par : $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

- 0.5 1-a) Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$
- 0.5 b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$
- 0.75 2- a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $\forall x \in I; f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où :
- $$g_n(x) = n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$
- 0.5 b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I
- 0.5 c) En déduire que α_n est unique.
- 3- On considère la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie.
- 1 a) Montrer que : $\forall n \geq 2; f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$
- 1 b) Montrer que : $\forall n \geq 2; g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.
- 0.25 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.
- 0.5 d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$

Troisième partie :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- 0.75 1- Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente.
- 0.5 2- En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx$
- 0.75 3- Montrer que : $(\forall n \geq 2); 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

FIN