NOMBRES RÉELS

(Partie 1)

I. Nombres décimaux, nombres rationnels

1. Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$, avec a entier et p entier naturel.
Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

Exemples :
0,56 ∈ $\mathbb{D}$
3 ∈ $\mathbb{D}$
$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$

2. Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples :
$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
4 ∈ $\mathbb{Q}$
-4,8 ∈ $\mathbb{Q}$
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration au programme :

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal :

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Alors il s'écrit sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.
Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

II. Notions de nombres réels

1. Définition

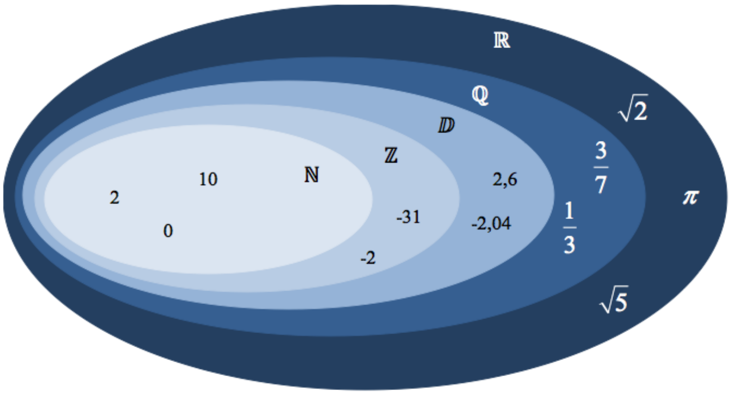
Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite numérique**.
L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.
C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons en classe de seconde.

Exemples :

2, 0, -5, 0.67, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

2. Classification des nombres

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
On a également les inclusions suivantes :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



La classification des nombres :

3. Les nombres irrationnels

Définition :
Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Exemples : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels. Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs, b non nul.
Comme pour un nombre rationnel, il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. En effet, le nombre de décimales qui le constitue est infini mais de surcroît ces décimales se suivent sans suite logique.
Démonstration au programme : Irrationalité de $\sqrt{2}$

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.
Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.
Il s'écrit alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.
Ainsi : $\frac{a^2}{b^2} = 2$ soit $a^2 = 2b^2$.
On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair.
En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair (voir Chapitre « Notion de multiple, diviseur et nombre premier »).
Puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
Comme, $a^2 = 2b^2$

On a : $(2k)^2 = 2b^2$

Soit : $4k^2 = 2b^2$

Soit encore $b^2 = 2k^2$.

On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair.
Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément. On aboutit à une absurdité.
Donc, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
Et donc, $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Méthode :
Donner un encadrement d'un nombre réel

A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.
La calculatrice affiche des valeurs approchées :

$\sqrt{2}$..........1,414213562

$\sqrt{3}$..........1,732050808

On a alors les encadrements à 10^{-3} : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.