Examen national du baccalauréat session normale 2016

Exercice 1 (2,5 pts)

Soit la suite (U_n) *définie sur IN par :*

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3+U_n}{5-U_n} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1. *Vérifier que pour tout n dans IN on a :* $U_{n+1}-3=\dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$ *et montrer par récurrence que :* $U_n<3$ *pour tout n dans IN.*
2. *Soit la suite* (V_n) *définie par:* $V_n=\dfrac{U_n-1}{3-U_n}$ *pour tout n de IN.*

   a) Montrer que la suite (V_n) *est géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *, et déduire que :*

   $$V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ *pour tout n de IN.*

   b) Montrer que : $U_n=\dfrac{1+3V_n}{1+V_n}$ *pour tout n de IN puis écrire* U_n *en fonction de n.*

   c) Déterminer la limite de la suite (U_n)

Exercice 2 (3pts)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ *les points A(2,1,3) ;B(3,1,1) et C(2,2,1) et la sphère(S) d'équation :*

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$$

1. a) *Montrer que :* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

   b) *En déduire que :* $2x+2y+z-9=0$ *est l'équation cartésienne du plan (ABC).*
2. a) *Montrer que le point Ω(1,-1,0) est le centre de la sphère(S) et 6 est son rayon.*

   b) *montrer que d(Ω,(ABC))=3 ,puis déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (C).*
1. a) *donner une représentation paramétrique de la droite (Δ)qui passe par Ω et qui est perpendiculaire au plan (ABC).*

   b) *montrer que B est le centre de (C).*

Exercice 3 (3pts)

1. *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :* $z^2 - 4z + 29 = 0$.
2. *On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $\left(o;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ *les points Ω, A et B d'affixes respectifs* $\omega = 2+5i$, $a = 5+2i$ *et* $b = 5+8i$.

   a) *soit u le nombre complexe tel que :* $u = b - \omega$

   vérifier que : $u = 3+3i$ *et que :* $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

   b) *donner un argument du nombre complexe* $\bar{u}$ *(* $\bar{u}$ *étant le conjugue de u).*

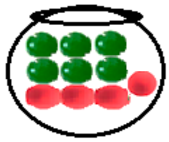
   c) *vérifier que :* $a - \omega = \bar{u}$ *, en déduire que* $\Omega A = \Omega B$ *et que :*

   $$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

d) *on considère la rotation R de centre* Ω *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R.

Exercice 4 (2,5 pts)



Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher de couleurs différentes (4 Rouges , 6 Vertes)

On tire de façon aléatoire, simultanément deux boules de l'urne .

1. *On considère l'événement A « les deux boules tirées sont rouges »*

   Montrer que : $P(A) = \frac{2}{15}$

2. *Soit X la variable aléatoire liée au :« nombre de boules rouges restantes après tirage »*

   a) *Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est* $\{2;3;4\}$

   b) *Montrer que* $P(X=3) = \frac{8}{15}$ *puis donner la loi de probabilité de X*

Probléme (8,5 pts)

<u>Partie I</u>

1. *Soit f la fonction définie sur IR par :* $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$

   et (C_f) *sa courbe dans un repère orthonormé* $(o\ ;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ *(unité 1cm)*

   a) *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2. a) Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   b) Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. a) Montrer que : $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ pour tout x de IR.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur IR.
   (remarquer que (f '(0)=0)

   c) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique $\boldsymbol{\alpha}$ sur $]1;\ln 4[$.

4. a) Montrer que (C_f) se trouve au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4;+\infty[$ et au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty;\ln 4[$.

   b) Montrer que (C_f) admet un unique point d'inflexion de coordonnées (0,-5).

   c) Construire dans un même repère$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (C_f) et la droite(D)
   (prendre ln4≃1,4 et $\alpha \simeq 1{,}3$) .

5. a) Montrer que : $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x)dx = -\frac{9}{2}$

   b) Calculer en cm^2 l'air du domaine délimité par la courbe (C_f),la droite (D),la droite d'équation x=0 et x=ln4.

Partie II

1. a) résoudre l'équation différentielle (E) $y'' - 3y' + 2y = 0$

   b) préciser la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]\ln 4; +\infty[$ par :
   $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$

   a) montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur IR

   b) vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ et calculer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$.