

Problème :

1ère partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par : $g(x) = 2 - x^2 \sqrt{x^2 - 1}$.

1- Vérifier que : $x^6 - x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^4 + x^2 + 2)$

2- Etudier le signe de la fonction g sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

2ème partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$

1 - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

2- Donner le tableau de variations de f sur $[-1; 1]$

3- Calculer $f(1)$, puis montrer que : $(\forall x \in [-1; 1]); f(x) \leq 0$

3ème partie :

Soit h la fonction définie sur par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1 & \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ h(x) = \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x \in [-1; 1] \end{cases}$$

Soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - Montrer que la fonction h est continue en 1 et -1.

2- Montrer que la courbe (C_h) admet un centre de symétrie $I(0; 1)$ sur l'intervalle $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

3- a - Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, puis montrer que la droite (D_1) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de

b - En déduire par symétrie que la droite (D_2) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$

4- Etudier la dérivabilité de h en 1 à droite et interpréter le résultat géométriquement

5- a - Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

b - En déduire le signe de $h'(x)$ sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

6- a - Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

b - En déduire le signe de $h'(x)$ sur $[-1; 1]$.

7- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

8- Donner les équations des demi-tangentes à gauche de 1 et à droite de -1.

9- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [\sqrt{2}; +\infty[$ / $h(\alpha) = 0$ et que $2 < \alpha < 3$

10- Tracer (C_h) ; la droite (D_1) et la droite (D_2) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4ème partie :

Soit u la restriction de h à l'intervalle

1 - Montrer que u admet une fonction réciproque u^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2- Calculer $(u^{-1})'(0)$ en fonction de α .

3- Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

www.guessmaths.co