



guessmaths

Série : Suite et Etude de Fonction Arctangente.

2ème Bac SM

Exercice 01

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Posons $w_n = v_n - u_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$

b- exprimer w_n en fonction de n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

2) Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes

3) On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que (t_n) est constante.

b- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Exercice 02

1. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b > a$

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{b-a}{1+b^2} < \text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$

2. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ;$

$$\frac{1}{(x^2 + 2)(x + \sqrt{x^2 + 1})} < \text{Arctan}(\sqrt{x^2 + 1}) - \text{Arctan}(x) < \frac{1}{(x^2 + 1)(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

3. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\text{Arctan}(\sqrt{x^2 + 1}) - \text{Arctan}(x) \right) = \frac{1}{2}$

Exercice 03

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$; telle que : $f(0)=0$ et $f(1)=1$

Montrer que : $(\exists \alpha \in]0;1[) / f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

Exercice 04

I. On considère le polynôme : $T(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ tel que $a_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$ et $a_0 \neq 0$.

Et soient $z_1; z_2; \dots; z_n$ les solutions de l'équation $T(z) = 0$

Montrer que : $\prod_{k=1}^n z_k = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$ et $\sum_{k=1}^n z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

II. 1) Soit $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_p$ les racines du polynôme : $P(z) = 2 \cdot \sum_{k=1}^p C_{2p+1}^{2k} \cdot z^k \cdot (i)^{2p+1-2k}$ tel que

$$p \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que : $\sum_{k=1}^p \alpha_k = \frac{p(2p-1)}{3}$ et $\prod_{k=1}^p \alpha_k = \frac{1}{2p+1}$

2) On considère le polynôme : $Q(z) = (z+i)^{2p+1} - (z-i)^{2p+1}$

a) Vérifier que les solutions de $Q(z) = 0$ sont les nombres : $x_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$

tel que $k \in \{1; 2; \dots; 2p\}$

Puis montrer que : $x_{2p+1-k} = -x_k$ pour tout $k \in \{1; 2; \dots; p\}$

b) Vérifier que : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; Q(z) = P(z^2)$; puis déduire que les solutions de

l'équation $P(z) = 0$ sont les nombres $\alpha_k = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$ Où $k \in \{1; 2; \dots; p\}$

c) Montrer que : $\left(\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\right) : \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$

Puis en déduire que : $\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{p(2p+2)\pi^2}{3(2p+1)^2}$ où $k \in \{1; 2; \dots; p\}$

III. On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Montrer que (U_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\pi^2}{6}$

