Examen Normalisé n° 3 **2éme Bac Sc.ECO**

Exercice 1 (4pt)

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $2e^{2\ln x}-\dfrac{5}{e^{-\ln x}}+3=0$; b) $\sqrt{e^{2x}}\times e^{x-1}=\left(e^{x}\right)^{3}$; c) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)=0$

2) Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{e^{2x}}\times e^{x-1}\geq\left(e^{x}\right)^{3}$; b) $\left(e^{x}-1\right)\ln x\leq 0$; c) $\sqrt[3]{x-1}\geq 2$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-2xe^{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x-\ln(x)\right)$

4) Calculer the les intégrales suivantes : $A=\int_{0}^{e-1}\dfrac{1}{x+1}dx$; $B=\int_{0}^{\pi}\text{Sin}x.e^{\cos x}dx$; $C=\int_{1}^{e}\dfrac{\ln x}{x}dx$

Exercice 02 (04 pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2} \end{cases}$ $(\forall n\in IN)$

0. 75pt 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in IN)$; $0\leq u_n<2$

0.5pt 2) a) Montrer que : $(\forall n\in IN)$; $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n+1)(2-u_n)}{u_n+2}$

0. 25pt b) Déduire que la suite (u_n) est croissante ; puis qu'elle est convergente.

3) On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n\in IN)$; $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-2}$

1 pt a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

0. 5 pt b) Donner v_n en fonction de n

1 pt c) Montrer que: $(\forall n\in IN)$; $u_n=\dfrac{2v_n+1}{v_n-1}$; puis déduire u_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (u_n).

Problème (12 pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\ln\left(x^2-2x\right)$

et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

2) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $x=1$ est un axe de symétrie de (C_f).

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ interpréter géométriquement les résultats obtenus.

4) a -Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b- Montrer que : $(\forall x \in]2;+\infty[)$; $f(x) = 2\ln x + \ln\left(1-\frac{2}{x}\right)$.

c- Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

5) Dresser tableau de variation de la fonction f.

6) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.

7) Construire (C_f) (indication: $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$)

8) a- Montrer que : $H : x \mapsto (x-2)\ln(x-2) - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-2)$; sur l'intervalle $]2;+\infty[$; calculer $\int_3^4 \ln(x-2)dx$.

b- En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_3^4 \ln(x)dx$

c- En déduire que : $\int_3^4 f(x)dx = 10\ln 2 - 3\ln 3 - 2$

9) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]2;+\infty[$

a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b- Montrer que : $(\forall x \in J)$; $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+e^x}$