guessmaths

# Correction examen nationale 2013 Session Normale

## 2éme Bac SM A et B

### Exercice 1:

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

1- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right);\ x*y=x+y-2$

a) Montrons que la loi $*$ est commutative et associative.

Pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{Z}$ ; on a : $\bullet\ x*y=x+y-2$

$$=y+x-2$$
$$=y*x$$

Donc la loi $*$ est commutative

Pour tout $x$ ; $y$ et $z$ dans $\mathbb{Z}$ ; on a : $\bullet\ (x*y)*z=(x+y-2)*z$

$$=(x+y-2)+z-2$$
$$=x+(y+z-2)-2$$
$$=x+(y*z)-2$$
$$=x*(y*z)$$

Donc la loi $*$ est associative.

b) Montrons que $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre.

Soit $e\in\mathbb{Z}/x*e=x$

On a : $x*e=x\Leftrightarrow x+e-2=x$

$\Leftrightarrow e-2=0$

$\Leftrightarrow e=2$

Donc $(\exists!e=2\in\mathbb{Z})/\ x*e=x$

D'où $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre $e=2$.

c) ✓ $\mathbb{Z}\neq\varnothing$

✓ La loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{Z}$

✓ $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre $e=2$.

✓ Soit $x$ de $\mathbb{Z}$ ; On a : $x*y=e\Leftrightarrow x+y-2=2$

$\Leftrightarrow y=-x+4$

Et $(-x+4)\in\mathbb{Z}$

Donc $(\exists!y=-x+4\in\mathbb{Z})/\ x*y=e$

D'où tout élément de $\mathbb{Z}$ est inversible pour la loi $*$

Par suite $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

2- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $T$ définie par :

$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right);\ xTy=xy-2x-2y+6$

et on considère l'application $f$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $f:\begin{array}{l}(\mathbb{Z},\times)\to(\mathbb{Z},T)\\ x\mapsto x+2\end{array}$

a) Montrons que l'application $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},T)$

On remarque que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$ ; $xy-2x-2y+6=x(y-2)-2(y-2)+2$

$$=(x-2)(y-2)+2$$

- Soient $x$ et $y$ deux éléments de $\mathbb{Z}$ ; on a :

$$\begin{aligned} f(x)Tf(y) &= f(x)f(y)-2f(x)-2f(y)+6 \\ &=(x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6 \\ &=(x+2-2)(y+2-2)+2 \\ &=xy+2 \\ &=f(x\times y) \end{aligned}$$

Donc $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$ ; $f(x\times y)=f(x)Tf(y)$

D'où $f$ est un homomorphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ vers $(\mathbb{Z},T)$

- Résolvons l'équation : $f(x)=y$

On a : $f(x)=y\Leftrightarrow x+2=y$

$$\Leftrightarrow x=y-2$$

Donc $\left(\exists!(x=y-2)\in\mathbb{Z}\right)/f(x)=y$

D'où $f$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$

Par suite l'application $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},T)$

b) Montrer que: $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right)$ ; $(x*y)Tz=(xTz)*(yTz)$

3- En déduire de tout ce qui précède que: $(\mathbb{Z},*,T)$ est un anneau commutatif et unitaire.

4- a) Montrer que: $xTy=2$ si est seulement si ($x=2$ ou $y=2$ )

b) En déduire que: l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est intègre.

c) $(\mathbb{Z},*,T)$ est-il un corps ? (justifier votre réponse)

## <u>Exercice 2</u>: (3.5 Pts)

<u>I-</u> Soit $a$ un nombre complexe non nul.

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$

$(E): 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$

1-Le discriminant de l'équation $(E)$ est: $\Delta=\left(-\left(3+i\sqrt{3}\right)a\right)^2-4\times2\times\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2$

$$\begin{aligned} &=\left(\left(3+i\sqrt{3}\right)^2-8-8i\sqrt{3}\right)a^2 \\ &=\left(9+6i\sqrt{3}-3-8-8i\sqrt{3}\right)a^2 \\ &=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)a^2 \end{aligned}$$

$$=\left(1-2i\sqrt{3}-3\right)a^2$$
$$=\left(1-2i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)a^2$$
$$=\left(\left(-1+i\sqrt{3}\right)a\right)^2$$

2- $\Delta=\left(\left(-1+i\sqrt{3}\right)a\right)^2\neq 0$ ; car $a\in\mathbb{C}^*$

D'où les solutions de l'équation $(E)$ sont :

- $z_1=\dfrac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a+\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a=ae^{i\frac{\pi}{3}}$
- $z_2=\dfrac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a-\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=a$

Donc l'ensemble des solutions de $(E)$ est : $S=\left\{a,ae^{i\frac{\pi}{3}}\right\}$

II- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $A$, $B$ et $M$ d'affixes respectifs $a$ , $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z$

Soit $r$ la rotation de centre $M$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

On pose $A_1=r^{-1}(A)$ et $B_1=r(B)$

($r^{-1}$ désigne la rotation réciproque de $r$)

et soient $a_1$ et $b_1$ les affixes respectifs de $A_1$ et $B_1$

1- On a : $\dfrac{b}{a}=\dfrac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{a}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{b}{a}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{b}{a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}OB=OA\\ \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$$

Donc le triangle $OAB$ est équilatéral.

2- a) On a : • $A_1=r^{-1}(A)\Leftrightarrow A=r\left(A_1\right)$

$$\Leftrightarrow a-z=\left(a_1-z\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a\times e^{-i\frac{\pi}{3}}-z\times e^{-i\frac{\pi}{3}}=\left(a_1-z\right)e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a\times e^{-i\frac{\pi}{3}}-z\times e^{-i\frac{\pi}{3}}=a_1-z$$

$$\Leftrightarrow a_1=a\times e^{-i\frac{\pi}{3}}-z\times e^{-i\frac{\pi}{3}}+z$$

$$\Leftrightarrow a_1=a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-z\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+z$$

$$\Leftrightarrow a_1=a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+z\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- $B_1=r(B)\Leftrightarrow b_1-z=(b-z)e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow b_1=\left(ae^{i\frac{\pi}{3}}-z\right)e^{i\frac{\pi}{3}}+z$$

$$\Leftrightarrow b_1=ae^{i\frac{2\pi}{3}}-ze^{i\frac{\pi}{3}}+z$$

$$\Leftrightarrow b_1=ae^{i\frac{2\pi}{3}}+z\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

b) On a : $z_{\overrightarrow{B_1M}}=z-b_1$

$$=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z=a_1$$

Donc $z_{\overrightarrow{B_1M}}=z_{\overrightarrow{OA_1}}\Rightarrow\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{OA_1}$

D'où le quadrilatère $OA_1MB_1$ est un parallélogramme.

3- On suppose que: $M\neq A$ et $M\neq B$

a) Montrons que: $\dfrac{z-b_1}{z-a_1}=-\dfrac{z-b}{z-a}\times\dfrac{a}{b}$

On a : $z-a_1=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-a)$ et $z-b_1=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-b)$

Donc $\dfrac{z-b_1}{z-a_1}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}(z-b)}{e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-a)}$

$$=\frac{1}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\times\frac{z-b}{z-a}$$

$$= \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\pi}} \times \frac{z-b}{z-a}$$

$$= \frac{1}{-e^{i\frac{\pi}{3}}} \times \frac{z-b}{z-a}$$

$$= -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b}$$

Donc $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b}$

b) $M$, $A_1$ et $B_1$ sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow M$, $O$, $A$ et $B$ sont cocycliques

## Exercice 3:

1-On suppose que $n$ vérifie la propriété $(R)$ et soit $p$ le plus petit diviseur premier positif de $n$.

a) Montrons que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p$ le plus petit diviseur premier positif de $n$ ; supposons que : $3^n - 2^n \equiv 0[n]$ ; alors :

$$p \mid n \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / n = kp \ ; \text{ et } n \mid 3^n - 2^n \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{Z}) / 3^n - 2^n = qn$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists q \in \mathbb{Z}) / 3^n - 2^n = kqp$$

$$\Leftrightarrow (\exists t = kq \in \mathbb{Z}) / 3^n - 2^n = tp$$

$$\Leftrightarrow 3^n - 2^n \equiv 0[p]$$

- **Supposons que** $p = 2$

On a : $3^n - 2^n \equiv 0[2]$ et $2^n \equiv 0[2]$

Donc $3^n \equiv 0[2] \Rightarrow 3 \equiv 0[2] \Rightarrow 1 \equiv 0[2]$ ce qui est absurde ; donc $p \neq 2$

- **Supposons que** $p = 3$

On a : $3^n - 2^n \equiv 0[3]$ et $3^n \equiv 0[3]$

Donc $2^n \equiv 0[3] \Rightarrow 2 \equiv 0[3] \Rightarrow \pm 1 \equiv 0[3]$ ce qui est absurde ; donc $p \neq 3$

Comme $p$ est premier alors $p \geq 5$.

b) Montrons que: $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

$p$ et 2 deux nombres premiers différents donc $p \wedge 2 = 1$ (car $p \geq 5$); de même $p \wedge 3 = 1$ ; d'après le petit Théorème de FERMAT on a :

$2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

c) Montrons qu'il existe un couple $(a,b)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

On pose : $d = n \wedge (p-1)$ ; et supposons que : $d \neq 1$

Si $d$ est premier ; $d \mid n$ et $d \mid (p-1) \Rightarrow d < p$ ; ce qui est absurde car $p$ est le plus petit diviseur premier positif de $n$ .

Si $d$ n'est pas premier ; alors il existe un nombre premier positif $q$ qui divise $d$ et $d \mid n$ ; donc $q \mid n$ et $q \mid (p-1) \Rightarrow q < p$ ; ce qui est absurde car $p$ est le plus petit diviseur premier positif de $n$.

D'où $d = 1$ ; par suite $n \wedge (p-1) = 1$

Et d'après le Théorème de BEZOUT : $\left((u,v) \in \mathbb{Z}^2\right) / u \times n + v \times (p-1) = 1$

Donc $\left((a = u, b = -v) \in \mathbb{Z}^2\right) / an - b(p-1) = 1$.

d) On a : $an - b(p-1) = 1$ et $a = q(p-1) + r$

Donc $\left(q(p-1)+r\right)n - b(p-1) = 1 \Rightarrow rn + (qn-b)(p-1) = 1$

$$\Rightarrow rn = 1 - (qn-b)(p-1)$$

Soit $k = -(qn-b)$ ; montrons que $k \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $k \leq 0$ ; alors $b \leq qn \Rightarrow 1 + b(p-1) \leq 1 + qn(p-1)$

$$\Rightarrow \left(a - q(p-1)\right)n \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < nr \leq 1$$

$$\Rightarrow nr = 1 \quad (\text{car } (nr \in \mathbb{N}))$$

$$\Rightarrow n = r = 1 \quad (\text{car } (n \in \mathbb{N}) \text{ et } (r \in \mathbb{N}))$$

Ce qui est absurde car $n > 1$ ; d'où $k \in \mathbb{N}^*$

Donc $\left(\exists k = -(qn-b) \in \mathbb{N}^*\right) / \; rn = 1 + k(p-1)$

2- Supposons qu'il existe un entier $n$ solution de $(\mathcal{R}) : 3^n - 2^n \equiv 0[n]$

On considère $p$ le plus petit diviseur premier positif de $n$ (si $n$ est premier on prend $n = p$)

D'après la question 1-b) ; on a : $\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1[p] \\ 3^{p-1} \equiv 1[p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1[p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1[p] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{1+k(p-1)} \equiv 2[p] \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3[p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{rn} \equiv 2[p] \\ 3^{rn} \equiv 3[p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1[p] \quad (I)$$

Or on a : $3^n - 2^n \equiv 0[n] \Rightarrow 3^n - 2^n \equiv 0[p]$

$$\Rightarrow 3^n \equiv 2^n[p]$$

$$\Rightarrow 3^{rn} \equiv 2^{rn}[p]$$

$$\Rightarrow 3^{rn} - 2^{rn} \equiv 0[p] \quad (II)$$

De $(I)$ et $(II)$ on obtient $1 \equiv 0[p]$ ; ce qui est contradictoire

Donc il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant $(R)$

**Exercice 4: (10 Pts)**

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x} \quad ;(\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

**Partie I**

1-a) Montrons que la fonction h est continue à droite en 1

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{x\ln x}$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x} \times \frac{1}{\dfrac{\ln x}{x-1}} = 1 \ (car \ \lim_{x\to1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1)$$

Et $h(1) = 1$ ; donc $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = h(1)$

Donc la fonction h est continue à droite en 1

b) • Montrons que $(\forall x > 1) : \ln x < x - 1$

On considère la fonction $\varphi(x) = \ln x - x + 1$ ; pour tout $x > 1$

Pour tout $x > 1$ ; on a : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} < 0$

Donc $\varphi$ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ ; d'où :

$(\forall x > 1)$ ; $\varphi(x) < \lim\limits_{x\to1^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \varphi(x) = 0$

Alors $(\forall x > 1)$ ; $\varphi(x) < 0$

Par suite $(\forall x > 1)$ ; $\ln x < x - 1$

• $(\forall x > 1)$ ; $h'(x) = \dfrac{x\ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$

$$= \frac{x\ln x - x\ln x - x + \ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x - (x-1)}{(x\ln x)^2}$$

*Et* $\ln x < x - 1$ *; donc* $h'(x) < 0$

*D'où la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle* $]1,+\infty[$

*2- a) On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x\ln x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x} = 0 \;\; (Car \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty)$$

<u>*Tableau de variations de h.*</u>

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ |
| $h(x)$ | $1 \searrow 0$ |

*b) On a :* $h([1,+\infty[) = ]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), h(1)] = ]0,1]$

*Donc* $(\forall x \geq 1) : 0 < h(x) \leq 1$

## <u>*Partie II*</u>

*la fonction numérique g définie sur l'intervalle* $[1,+\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt & ; (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

*1- a)On a :* $(\forall x > 1)$ $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt$

$$= \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{(\ln t)'}{\ln t}dt$$

$$= \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}$$

$$= \ln\left|\ln x^2\right| - \ln|\ln x|$$

$$= \ln\left(\frac{2|\ln x|}{|\ln x|}\right)$$

$$= \ln 2$$

b) Soit $x > 1$ ; on a : $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt$

$$= \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{t\ln t}dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$$

c) Montrons que $(\forall x > 1)$ $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt$

Soit $x > 1$ ; on a : $g(x) - \ln 2 == \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$ ; on pose $u = \sqrt{t}$

On a : $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \Rightarrow dt = 2\,udu$ et $\begin{cases} t = x \Rightarrow u = \sqrt{x} \\ t = x^2 \Rightarrow u = x \end{cases}$

D'où $\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u^2\ln u^2} \times 2udu$

$$= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u^2\ln u^2} \times 2udu$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{2u^2\ln u} \times 2udu$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u\ln u}du$$

Donc $(\forall x > 1)$ $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt$

2- a) Montrer que $(\forall x > 1) : \left(x - \sqrt{x}\right)h(x) \le g(x) - \ln 2 \le \left(x - \sqrt{x}\right) h\left(\sqrt{x}\right)$

On a : $\sqrt{x} \le t \le x \Leftrightarrow h(x) \le h(t) \le h\left(\sqrt{x}\right)$

$$\Leftrightarrow h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x} 1dt \le \int_{\sqrt{x}}^{x} h(t)dt \le h\left(\sqrt{x}\right)\int_{\sqrt{x}}^{x} 1dt$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x}\right)h(x) \le \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt \le \left(x - \sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x}\right)h(x) \le g(x) - \ln 2 \le \left(x - \sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$$

Donc $(\forall x > 1) : \left(x - \sqrt{x}\right)h(x) \le g(x) - \ln 2 \le \left(x - \sqrt{x}\right) h\left(\sqrt{x}\right)$

b) On a : $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{g(x) - \ln 2}{x - 1}$

$$Donc \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) \le \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \le \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(x) \le \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \le \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(x)\right) \le \lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} \le \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(\sqrt{x})\right)$$

$$Et \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(\sqrt{x})\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(x)\right) = \frac{1}{2}h(1) = \frac{1}{2}$$

$$D'où \lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Par suite la fonction $g$ est dérivable à droite au point 1 ; et $g'_d(1) = \frac{1}{2}$

c) • Pour tout $x > 1$ on a : $\left(x-\sqrt{x}\right)h(x) \le g(x) - \ln 2 \le \left(x-\sqrt{x}\right)h(\sqrt{x})$

$$\Rightarrow g(x) \ge \ln 2 + \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)$$

$$Et \lim_{x\to+\infty} \ln 2 + \left(x-\sqrt{x}\right)h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln 2 + \left(x-\sqrt{x}\right)\frac{(x-1)}{x\ln x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln 2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}\right) = +\infty$$

$$Donc \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

• Pour tout $x > 1$ on a : $\left(x-\sqrt{x}\right)h(x) \le g(x) - \ln 2 \le \left(x-\sqrt{x}\right)h(\sqrt{x})$

$$\Rightarrow g(x) \le \ln 2 + \left(x-\sqrt{x}\right)h(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{x} \le \ln 2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

$$Et \lim_{x\to+\infty}\left(\ln 2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) = 0$$

$$Donc : \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 0$$

3- a) la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et la fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,+\infty[$ ; donc la fonction $t \mapsto \sqrt{t}\ln t$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $(\forall t \in ]0,+\infty[)$ ; $\sqrt{t}\ln t \neq 0$

D'où la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et admet une primitive

$\phi$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Pour tout $x>1$ on a : $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt=\left[\varphi(t)\right]_x^{x^2}=\varphi(x^2)-\varphi(x)$

$\phi$ est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ ; et la fonction $u:x\mapsto x^2$ est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et $u(]1,+\infty[)\subset]1,+\infty[$ $(car\ x>1\Rightarrow x^2>1)$

Donc la fonction $x\mapsto\varphi(x^2)$ dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$

Par suite $g$ est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et Pour tout $x>1$ on a :

$$\begin{aligned}g'(x)&=2x\varphi'(x^2)-\varphi'(x)\\&=2x\times\frac{1}{\sqrt{x^2}\ln x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\\&=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\\&=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})\end{aligned}$$

Donc Pour tout $x>1$ ; $g'(x)=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

b) D'après la partie I question 2- b) pour tout $x>1$ on a :

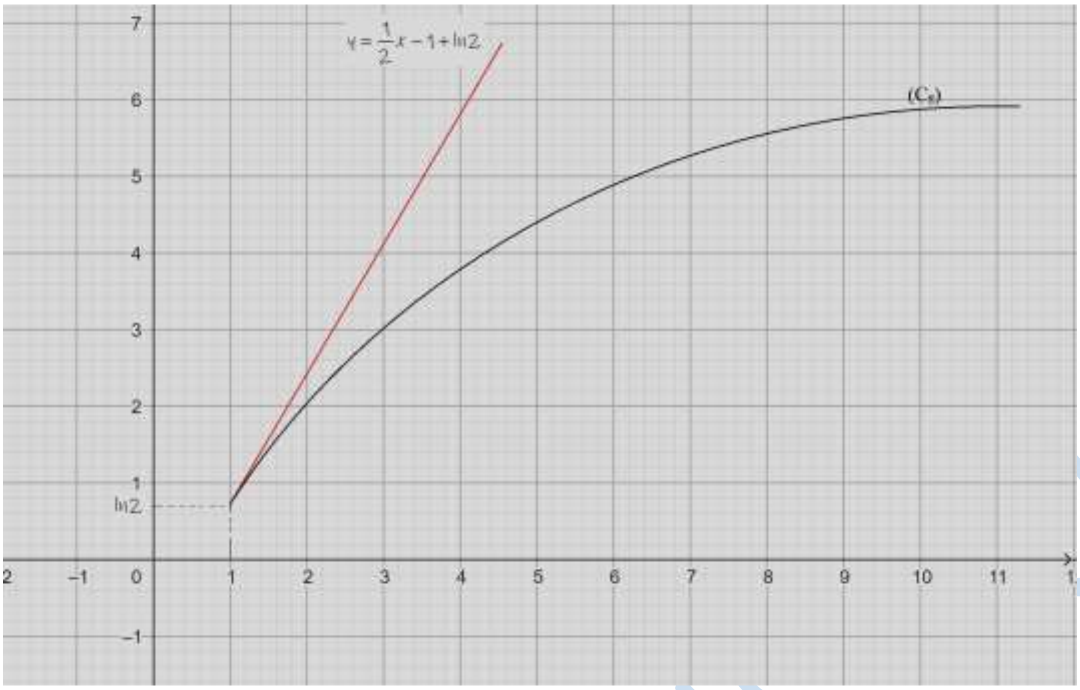
$$\begin{aligned}0<h(x)\le 1&\Rightarrow 0<h(\sqrt{x})\le 1\quad (car\ \sqrt{x}>1)\\&\Rightarrow 0<\frac{1}{2}h(\sqrt{x})\le\frac{1}{2}\\&\Rightarrow 0<g'(x)\le\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $(\forall x>1) : 0<g'(x)\le\frac{1}{2}$

<u>Tableau de variations de g</u>

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$ |

c) Construire la courbe (C)




## Partie III

I-1-Montrons que la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $]-\infty, \ln 2]$

Pour tout $x \in ]1,+\infty[$ ; on a : $k'(x) = g'(x) - 1$

Et d'après ce qui précède on a : $(\forall x > 1) : 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

D'où $-1 < k'(x) \leq -\frac{1}{2}$

Donc $k$ est une fonction strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ ; par suite elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $k([1,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} k(x), k(1)\right]$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ )

- $k(1) = g(1) - 1 + 1 = \ln 2$

D'où la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $]-\infty, \ln 2]$

2- On a : $0 \in ]-\infty, \ln 2]$ et comme $k$ est une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $]-\infty, \ln 2]$ ; alors il existe un unique réel $\alpha$ de l'intervalle $]1,+\infty[$ qui vérifie $K(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

$$\Rightarrow g(\alpha) + 1 = \alpha$$

II- $(u_n)_{n\geq 0}$ : $\begin{cases} 1\leq u_0<\alpha \\ u_{n+1}=1+g(u_n)\ ;(\forall n\geq 0) \end{cases}$

1- a) Montrons par récurrence que: $(\forall n\geq 0);\ 1\leq u_n<\alpha$

Pour n=0

On a : $1\leq u_0<\alpha$ par définition de $(u_n)_{n\geq 0}$

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $1\leq u_n<\alpha$ et montrons que $1\leq u_{n+1}<\alpha$

Hypothèse de récurrence : $1\leq u_n<\alpha \Rightarrow g(1)\leq g(u_n)<g(\alpha)$

(g est une fonction strictement croissante sur $[1,+\infty[$ )

$$\Rightarrow 1+\ln 2\leq 1+g(u_n)<1+g(\alpha)$$
$$\Rightarrow 1\leq 1+\ln 2\leq u_{n+1}<\alpha$$
$$\Rightarrow 1\leq u_{n+1}<\alpha$$

Conclusion $(\forall n\geq 0);\ 1\leq u_n<\alpha$

b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ ; on a : $u_{n+1}-u_n=1+g(u_n)-u_n$
$$=g(u_n)-u_n+1=k(u_n)$$

Et d'après la question précédente on a :

$1\leq u_n<\alpha \Rightarrow k(u_n)>k(\alpha)\Rightarrow k(u_n)>0$

Donc $u_{n+1}-u_n>0$

D'où la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

c) la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante ;majorée par $\alpha$ donc elle est convergente .

Soit la fonction $H(x)=1+g(x)$

- $H$ est continue sur $[1,\alpha]$
- $u_0\in[1,\alpha]$
- $(\forall n\geq 0);u_n\in[1,\alpha]$
- $u_{n+1}=H(u_n)$
- $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente

Alors la limite est solution de l'équation

$H(x)=x \Leftrightarrow g(x)+1-x=0 \Leftrightarrow k(x)=0$ ; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

2- a) Montrer que : $(\forall n \geq 0)$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

$H$ est continue sur $[1,\alpha]$ et dérivable sur $]1,\alpha[$ et on a :

$\forall x \in ]1,\alpha[$ ; $|H'(x)| = |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finies on a :

$\left(\forall (x,y) \in [1,\alpha]^2\right)$ ; $|H(x) - H(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; on a : $u_n \in [1,\alpha]$ et $\alpha \in [1,\alpha]$

Donc : $|H(u_n) - H(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) D'après la question précédente on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

$$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-2} - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$$

En multipliant les membres des inégalités on obtient :

$(\forall n \geq 0)$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

c) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$ et $(\forall n \geq 0)$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Alors on retrouve $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ .