Série n°1 exercices corrigés sur les suites

Terminale S

Exercice 1

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 5u_n + 4$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

2. Démontrer que pour tout n entier, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.
Montrer que pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

4. On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ avec $n \geq 1$

a. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

a. Etudier les variations de la fonction $f(x) = x(2-x)$.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $0 < u_n < 1$

Correction

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Initialisation

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 2$ alors $u_0 > 0$; donc la propriété est initialisée.

Hérédité

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $u_p > 0$ et montrons que $u_{p+1} > 0$

Par hypothèse de récurrence on a : $u_p > 0$

Donc $5u_p + 4 > 0$

D'où $u_{p+1} > 0$

Alors la propriété est héréditaire.

Conclusion

$u_n > 0$ pour tout entier n.

2. Montrons par récurrence que pour tout n entier, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Initialisation

Pour $n = 0$; on a : $4^0 + 5 = 6$ est un multiple de 3 ; donc la propriété est initialisée.

Hérédité

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : 4^p+5 *est un multiple de* 3 *et montrons que* $4^{p+1}+5$ *est un multiple de* 3

On a : $4^{p+1}+5=4\times 4^p+5$

Par hypothèse de récurrence on a : 4^p+5 *est un multiple de* 3

Donc il existe un entier k tel que $4^p+5=3k$ *; alors* $4^p=3k-5$

D'où $4^{p+1}+5=4\times(3k-5)+5$

$$=3\times 4k-20+5$$
$$=3\times 4k-3\times 5$$
$$=3\times(4k-5)$$

Donc $4^{p+1}+5$ *est un multiple de* 3 *; alors la propriété est héréditaire.*

<u>Conclusion</u>

4^n+5 *est un multiple de* 3 *pour tout entier n.*

3. (u_n) *définie par :* $u_0=-3$ *et pour tout entier n,* $u_{n+1}=5-4u_n$.

Montrons par récurrence que pour tout entier n, $u_n=(-4)^{n+1}+1$.

<u>Initialisation</u>

Pour $n=0$ *; on a :* $(-4)^{0+1}+1=-3$ *; et* $u_0=-3$ *; donc la propriété est initialisée.*

<u>Hérédité</u>

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $u_p=(-4)^{p+1}+1$ *et montrons que* $u_{p+1}=(-4)^{p+2}+1$

On a : $u_{p+1}=5-4u_p$ *et d'après l'hypothèse de récurrence on a :* $u_p=(-4)^{p+1}+1$

Donc $u_{p+1}=5-4\left((-4)^{p+1}+1\right)$

$$=5+\left((-4)\times(-4)^{p+1}-4\right)$$
$$=(-4)^{p+2}+1\text{; alors la propriété est héréditaire.}$$

<u>Conclusion</u>

$u_n=(-4)^{n+1}+1$ *pour tout entier n.*

4. *On a :* $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ *avec* $n\geq 1$

a. $S_1=1,\ S_2=1^2+2^2=5,\ S_3=1^2+2^2+3^2=14$ *et* $S_4=1^2+2^2+3^2+4^2=30$.

On a : $S_{n+1}=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2$

$$S_n+(n+1)^2.$$

Donc pour tout entier n ; $S_{n+1}=S_n+(n+1)^2$

b. *Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel* $n \geq 1$ *:*

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Initialisation

Pour $n=1$ *; on a :* $\frac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6}=1$ *et* $S_1=1$ *; donc la propriété est initialisée.*

Hérédité

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $S_p = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ *et montrons que*

$$S_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

On a : $S_{p+1} = S_p + (p+1)^2$ *et d'après l'hypothèse de récurrence* $S_p = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

Donc $S_{p+1} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(p+1)\big(p(2p+1)+6(p+1)\big)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)(2p^2+p+6p+6)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$$

Et on a : $(p+2)(2p+3) = 2p^2+7p+6$

Donc $S_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$ *; alors la propriété est héréditaire.*

Conclusion

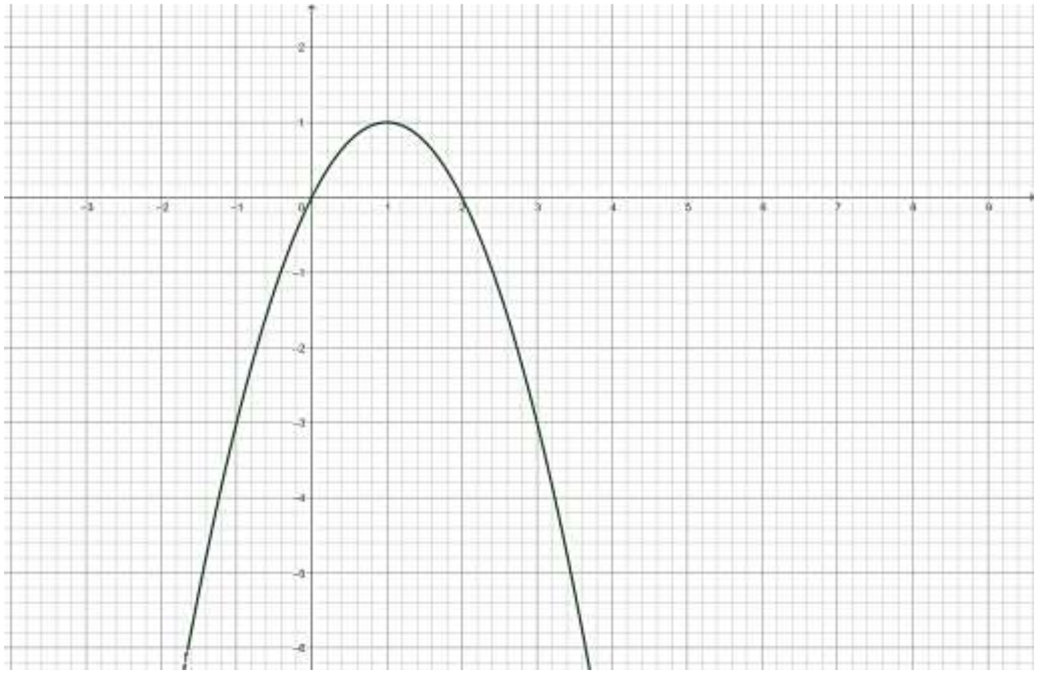
$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *pour tout entier n.*

5. (u_n) : $u_0 \in]0;1[$ *et* $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$.

a. *La fonction* $f(x) = x(2-x)$ *est un polynôme de 2iéme degré* $f(x) = -x^2+2x$

la coefficient de x^2 *est* $a=-1$ *et celle de x est* $b=2$.

Donc la fonction est croissante sur l'intervalle $]-\infty;1[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]1;+\infty[$.



b. *Démontrons par récurrence que pour tout entier n,* $0 < u_n < 1$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 0$ *; on a :* $u_0 \in]0;1[$ *; donc* $0 < u_0 < 1$

D'où la propriété est initialisée.

<u>Hérédité</u>

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $0 < u_p < 1$ *et montrons que* $0 < u_{p+1} < 1$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $0 < u_p < 1$

Et comme f est croissante sur $]0;1[$ *; donc* $f(0) < f(u_p) < f(1)$

Donc $0 < u_{p+1} < 1$ *(car* $f(0) = 0$ *;* $f(u_p) = u_{p+1}$ *et* $f(1) = 1$*)*

Alors la propriété est héréditaire.

<u>Conclusion</u> $0 < u_n < 1$ *pour tout entier n.*

<u>Exercice 2</u>

1. *l'inégalité de Bernouilli ; soit un réel tel que :* $a > 0$ *; Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$(1+a)^n \geq 1 + a^n$

2. *Soit la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ; $0 < u_n < 2$,

3. *Montrer par un raisonnement par récurrence que l'on a pour tout n entier* $3^n > n$.

4. *Démontrer par récurrence que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, la somme des entiers de 1 à n est égale à* $\frac{n(n+1)}{2}$ *c'est-à-dire :* $1+2\ +....+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

5. *Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier n non nul :*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

6. *On considère la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

Démontrer par récurrence que l'on $u_n=n^2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

<u>Correction</u>

1. *Montrons par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *;* $(1+a)^n \geq 1+a^n$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$ *; on a :* $(1+a)^1=1+a$ *et* $1+a^1=1+a$ *donc* $(1+a)^1 \geq 1+a^1$

<u>Hérédité</u>

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $(1+a)^p \geq 1+a^p$ *et montrons que :*

$(1+a)^{p+1} \geq 1+a^{p+1}$

Par H.R on a : $(1+a)^p \geq 1+a^p \Leftrightarrow (1+a)^{p+1} \geq (1+a)(1+a^p)$

$$\Leftrightarrow (1+a)^{p+1} \geq (1+a)(1+a^p)$$
$$\Leftrightarrow (1+a)^{p+1} \geq 1+a^p+a+a^{p+1} \geq 1+a^{p+1}$$
$$\Leftrightarrow (1+a)^{p+1} \geq 1+a^{p+1}$$

<u>Conclusion</u>

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ *;* $(1+a)^n \geq 1+a^n$

2. *Montrons par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;* $0<u_n<2$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=0$ *; on a :* $u_0=1$ *; donc* $0<u_0<2$

<u>Hérédité</u>

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $0<u_p<2$ *et montrons que* $0<u_{p+1}<2$

Par H.R on a : $0 < u_p < 2 \Leftrightarrow 2 < 2 + u_p < 2 + 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2+u_p} < \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+u_p} < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < u_{p+1} < 2$$

Conclusion

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 2$

3. *Montrons par un raisonnement par récurrence que l'on a pour tout n entier* $3^n > n$

Initialisation

Pour $n = 0$ *; on a :* $3^0 = 1$ *et* $1 > 0$

Hérédité

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $3^p > p$ *et montrons que* $3^{p+1} > p+1$

Par H.R on a : $3^p > p$ *et* $3 > \frac{p+1}{p}$ *(car* $\frac{p+1}{p} = 1 + \frac{1}{p} < 2$*)*

Donc $3^p \times 3 > p \times \frac{p+1}{p} \Leftrightarrow 3^{p+1} > p+1$

Conclusion

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $3^n > n$

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right)$

1. *On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$

Démontrer que f admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel n ; $u_n \geq \sqrt{7}$

2. a. *Soit n un entier naturel quelconque*

Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

b. *Pourquoi peut-on déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

c. *Déterminer la limite de la suite* (u_n) *.*

3. *Démontrer que pour tout entier naturel* n *:* $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$

Correction

$u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right)$ *pour tout entier naturel n*

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{7}{x}\right)$; $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right)$

f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ *; et pour tout* $x \in \left]0;+\infty\right[$ *; on a :*

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 7}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{7}\right)\left(x - \sqrt{7}\right)$$

Comme $x \in \left]0;+\infty\right[$ *; alors* $f'(x)$ *est du même signe que* $\left(x - \sqrt{7}\right)$

Donc f est décroissante sur $\left]0;\sqrt{7}\right]$ *est croissante sur* $\left[\sqrt{7};+\infty\right[$

Par suite elle admet $f\left(\sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \dfrac{7}{\sqrt{7}}\right)$
$= \sqrt{7}$

Comme valeur minimale ; d'où $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right)$; $f(x) \geq \sqrt{7}$

Par suite pour tout entier naturel n ; $f(u_n) \geq \sqrt{7}$

On en déduit que pour tout entier naturel n ; $u_n \geq \sqrt{7}$

2. a. *pour tout entier naturel n ; on a :* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - u_n$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{u_n} - u_n\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7 - {u_n}^2}{u_n}\right)$$
$$= \frac{1}{2u_n}\left(\sqrt{7} + u_n\right)\left(\sqrt{7} - u_n\right)$$

Et comme $u_n \geq \sqrt{7}$ *; alors* $u_{n+1} - u_n \leq 0$

b. *Donc la suite* (u_n) *est décroissante et elle est minorée par* $\sqrt{7}$ *; alors on peut en déduire qu'elle est convergente.*

c. *Si* $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ *; alors* ℓ *est solution de l'équation* $f(x) = x$

Donc $\frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{7}{x} - x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{7 - x^2}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{7} - x\right)\left(\sqrt{7} + x\right)}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7} - x = 0 \ \ ou \ \ \sqrt{7} + x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7} - x = 0 \ \left(car \ u_n \in \left[\sqrt{7}; +\infty\right[\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{7}$

3. *Montrons que pour tout entier naturel* n *:* $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$

On a pour tout entier naturel n *:* $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - \sqrt{7}$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n - 2\sqrt{7} + \frac{7}{u_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^{\ 2} - 2u_n\sqrt{7} + 7}{u_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$

On admet que pour tout entier naturel n *;* $u_n > 0$

1. a. *Calculer* u_1 *;* u_2 *;* u_3 *et* u_4*. On pourra donner une valeur approchée à* 10^{-3} *prés.*

b. *Vérifier que si n est l'un des entiers 1 ;2 ;3 ou 4 alors* $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

c. *Montrer que pour tout entier naturel n ;* $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

d. *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ;* $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

2. *Pour tout entier naturel n ; on pose :* $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. *Monter que pour tout entier naturel n ;* $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$

b. *Déduire que la suite* (v_n) *est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.*
En déduire l'expression de v_n *en fonction de n.*

c. *Monter que pour tout entier naturel n ;* $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

Exprimer u_n *en fonction de n ; puis déterminer la limite de* (u_n).

<u>Correction</u>

$$u_0 = 2 \ et \ \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} \end{cases} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) $u_1 = \dfrac{u_0 + 2}{2u_0 + 1}$

$= \dfrac{2+2}{2 \times 2 + 1}$

$= \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$u_2 = \dfrac{u_1 + 2}{2u_1 + 1}$

$$=\frac{\frac{4}{5}+2}{2\times\frac{4}{5}+1}$$

$$=\frac{14}{13}\simeq 1{,}077$$

$$u_3=\frac{u_2+2}{2u_2+1}$$

$$=\frac{\frac{14}{13}+2}{2\times\frac{14}{13}+1}$$

$$=\frac{40}{41}\simeq 0{,}976$$

$$u_4=\frac{u_3+2}{2u_3+1}$$

$$=\frac{\frac{40}{41}+2}{2\times\frac{40}{41}+1}$$

$$=\frac{122}{121}\simeq 1{,}008$$

b. *Pour n égale à l'un des entiers 1 ou 3 alors* u_n-1 *est négative donc du signe de* $(-1)^n$

Pour n égale à l'un des entiers 2 ou 4 alors u_n-1 *est positive donc du signe de* $(-1)^n$

On conclut que *: Pour n égale à l'un des entiers 1 ;2 ;3 ou 4 alors* u_n-1 *a le même signe que* $(-1)^n$.

c. *Pour tout entier naturel n ; on a :* $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}-1$

$$= \frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1}$$

$$= \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{2u_n + 1}$$

$$= \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$$

d. *Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n ;* $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

Initialisation

Pour n=0

On a : $u_0 - 1 = 1$ *et* $(-1)^0 = 1$ *; donc* $u_0 - 1$ *a le même signe que* $(-1)^0$.

Initialisation

Pour ***Initialisation***

Pour $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$ *; et montrons que* $u_{n+1} - 1$ *a le même signe que* $(-1)^{n+1}$

On a d'après l'HR $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$

Et d'après la question précédente $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

$$= \frac{-(u_n - 1)}{2u_n + 1}$$

Donc $u_{n+1} - 1$ *a le même signe que* $\left(-(-1)^n\right)$

D'où $u_{n+1} - 1$ *a le même signe que* $(-1)^{n+1}$

Conclusion

Pour tout entier naturel n ; $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

2. *Pour tout entier naturel n ; on pose :* $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. *Montrons que pour tout entier naturel n ;* $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$

Pour tout entier naturel n ; $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$$=\frac{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}+1}$$

$$=\frac{\dfrac{u_n+2-2u_n-1}{\cancel{2u_n+1}}}{\dfrac{u_n+2+2u_n+1}{\cancel{2u_n+1}}}$$

$$=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}$$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $v_{n+1}=\dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$

b. *D'après la question précédente on a : pour tout entier naturel n ;* $v_{n+1}=\dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}\\&=-\frac{1}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n+1}\\&=-\frac{1}{3}\times v_n\end{aligned}$$

Donc (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q=-\dfrac{1}{3}$ *; et de premier terme*

$v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\dfrac{1}{3}$ *; d'où l'expression de* v_n *en fonction de n est :* $v_n=\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$=-\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

c. *Pour tout entier naturel n ; on a :* $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_n(u_n + 1) = (u_n - 1)$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - v_n$$
$$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - v_n$$
$$\Leftrightarrow -u_n(1 - v_n) = -(1 + v_n)$$
$$\Leftrightarrow u_n(1 - v_n) = (1 + v_n)$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

On en déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

Et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$; *car* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

Exercice 5

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_0 = 5$ *et* $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ *pour tout entier naturel n*

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$ *; alors on a pour tout entier naturel n ;* $u_{n+1} = f(u_n)$

1) a) Etudier les variations de f ; puis construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ *sa courbe représentative* (C) *ainsi que la droite d'équation* $y = x$

b) Sur l'axe des abscisses placer u_0 *puis construire* u_1 ; u_2 ; u_3 *en laissant apparents les traits de construction.*

c) Quelle conjoncture peut-on émettre sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

2) a) Démontrer par récurrence que : $u_n - 1 > 0$ *pour tout entier naturel n*

b) Valider par une démonstration les conjonctures émises dans la question 1)c).

3) Dans cette partie en se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode en une expression de u_n en fonction de n.

On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ *pour tout entier naturel n*

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$

b) Pour tout entier naturel n ; exprimer v_n ; puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction

$u_0 = 5$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

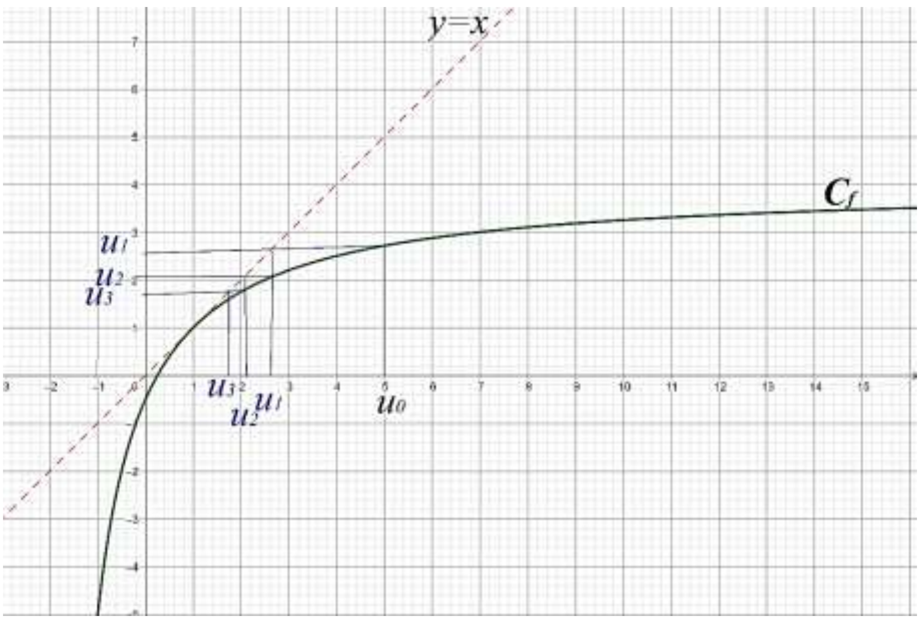
1) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

a) f est dérivable sur $]-2;+\infty[$ *et pour tout* $x \in]-2;+\infty[$ *; on a :* $f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{(x+2)^2}$

$$= \frac{9}{(x+2)^2}$$

Donc f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$

b)



c) D'après le graphe on conjoncture que la suite (u_n).converge vers 1.

2) a) Montrons par récurrence que : $u_n - 1 > 0$ pour tout entier naturel n

Initialisation

Pour n=0

On a : $u_0 = 5$ donc $u_0 - 1 > 0$.

Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n - 1 > 0$; et montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \\ &= \frac{4(u_n + 2)}{u_n + 2} - \frac{9}{u_n + 2} \\ &= 4 - \frac{9}{u_n + 2} \end{aligned}$$

On a d'après l'HR $u_n - 1 > 0$; donc : $u_n + 2 > 3 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{9}{u_n + 2} > -\frac{9}{3} \\ &\Rightarrow 4 - \frac{9}{u_n + 2} > 4 - 3 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Conclusion

Pour tout entier naturel n ; $u_n - 1 > 1$.

b) On peut confirmer que (u_n) est minorée par 1 ; et pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} \end{aligned}$$

$$=\frac{-(u_n-1)^2}{u_n+2}$$

Donc $u_{n+1}-u_n \leq 0$

D'où la suite (u_n) *est décroissante et comme elle est minorée par 1 alors elle est convergente et sa limite est solution de l'équation* $f(x)=x$

Donc $\frac{4x-1}{x+2}=x \Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$$\Leftrightarrow x=1$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$

3) $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ *pour tout entier naturel n*

a) Pour tout entier naturel n ; on a : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}$

$$=\frac{1}{\frac{4u_n-1}{u_n+2}-1}-\frac{1}{u_n-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{4u_n-1-u_n-2}{u_n+2}}-\frac{1}{u_n-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{3(u_n-1)}{u_n+2}}-\frac{1}{u_n-1}$$

$$=\frac{1}{u_n-1}\times\left(\frac{u_n+2}{3}-1\right)$$

$$=\frac{1}{3(u_n-1)}\times(u_n+2-3)$$

$$=\frac{1}{3(u_n-1)}\times(u_n-1)$$

$$=\frac{1}{3}$$

Donc la suite (v_n) *est une suite arithmétique de raison* $\frac{1}{3}$

b) Pour tout entier naturel n ; on a : $v_n = v_0 + \frac{n}{3}$

$$= \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{n}{3}$$

$$= \frac{1}{5-1} + \frac{n}{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{n}{3}$$

; comme $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Rightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{n}{3}} + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{3+4n}{12}} + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{12}{3+4n} + 1$$

c) Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{12}{3+4n} + 1 = 1$

Exercice 6

1- Déterminer les valeurs de l'entier naturel n telles que : $2n^2 \geq (n+1)^2$

2- Montrer que pour tout entier naturel $n > 3$ *;* $2^n \geq n^2$

3- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n$

Correction

1- Soit n un entier naturel telles que : $2n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n-1 \geq \sqrt{2} \\ n-1 \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 1+\sqrt{2} \\ n \leq 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Or $1-\sqrt{2} < 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *; donc* $n \geq 1+\sqrt{2}$

Par suite les valeurs de l'entier naturel n telles que : $2n^2 \geq (n+1)^2$ *; sont les entiers* $n \geq 3$

2- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n > 3$ *;* $2^n \geq n^2$

Initialisation

Pour n=4

On a : $2^4 = 16$ *et* $4^2 = 16$ *; donc* $2^4 \geq 4^2$.

Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $2^n \geq n^2$ *; et montrons que* $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

On a d'après l'HR $2^n \geq n^2$ *; donc :* $2 \times 2^n \geq 2n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2 \quad (\mathbf{1})$

Et $2n^2 - (n+1)^2 = \left(\sqrt{2}n - (n+1)\right)\left(\sqrt{2}n + (n+1)\right)$

$$= \left(\sqrt{2}n - (n+1)\right)\left(\sqrt{2}n + (n+1)\right)$$

$$= \left(\left(\sqrt{2}-1\right)n - 1\right)\left(\sqrt{2}n + (n+1)\right)$$

Et $n > 3 \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)n > 3\left(\sqrt{2}-1\right)$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)n - 1 > 3\left(\sqrt{2}-1\right) - 1$$

$$\Rightarrow \left(\left(\sqrt{2}-1\right)n - 1\right) > 3\sqrt{2} - 4 > 0$$

D'où $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2n^2 \geq (n+1)^2 \quad (\mathbf{2})$

De $(\mathbf{1})$ *et* $(\mathbf{2})$ *on déduit que* $\Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Conclusion

Pour tout entier naturel $n > 3$ *;* $2^n \geq n^2$

3- Comme pour tout entier naturel $n > 3$ *;* $2^n \geq n^2$ *;et* $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Alors on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Résultat logique car on a vu dans le cours que pour $q > 1$ *on a :* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$