

Exercice 1 (3pts)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ le plan P d'équation: $x + y + z + 4 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, -1, -1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

- calculer $d(\Omega, (P))$ et déduire que le plan P est tangent à la sphère (S) .
 - vérifier que $H(0, -2, -2)$ est le point d'intersection du plan P et la sphère (S) .
- on considère les points $A(2, 1, 1)$ et $B(1, 0, 1)$
 - vérifier que : $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
et déduire que : $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)
 - donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par Ω et qui est perpendiculaire au plan (OAB) .
 - déterminer les coordonnées des points de contact de la droite (Δ) et la sphère (S) .

Exercice 2 (3pts)

- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
 $z^2 + 10z + 26 = 0$
- On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points A, B, C et Ω d'affixes respectifs $a = -2 + 2i$, $b = -5 + i$, $c = -5 - i$ et $\omega = -3$.
 - montrer que : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$
 - déduire la nature du triangle ΩAB
- soit D l'image de C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $(6 + 4i)$.
 - montrer que l'affixe de D est $d = 1 + 3i$
 - montrer que : $\frac{b - d}{a - d} = 2$, en déduire que A est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 3 (3pts)

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher de couleurs différentes (3 Rouges, 3 Vertes, 2 Blanches)

On tire de façon aléatoire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. On considère les événements :

A « obtenir au moins une boule Blanche »

B « les deux boules tirées sont de même couleur »

Montrer que : $P(A) = \frac{13}{28}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$

1. Soit X la variable aléatoire liée au « nombre de boules Blanches tirées »

a) Montrer que : $P(X = 2) = \frac{1}{28}$.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Problème (11pts)

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, puis déduire que g est croissante sur $[\ln 2; +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \ln 2]$.

2. Vérifier que : $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$, puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.

3. Déduire que $g(x) > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

II - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$

et $((C_f))$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

1. a) montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

(on remarquera que : $e^x - 2x = x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$)

b) donner une interprétation géométrique aux deux résultats obtenus

2. a) Montrer que : $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) montrer que $y = x$ est l'équation de la droite (T) tangente à (C_f) au point

O origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. construire dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite (T) .

(on prendra $\frac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on accepte que (C_f) admet deux points d'inflexion une d'abscisse dans l'intervalle $]0;1[$ et l'autre d'abscisse supérieure à $\frac{3}{2}$).

4. a) Montrer que : $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$ pour tout x dans $[0; +\infty[$.

b) En utilisant une intégration par partie montrer que :

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

c) Soit en cm^2 $A(E)$ l'air de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=0$.

$$\text{Montrer que : } 1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$$

III- Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par : $h(x) = f(x)$.

a) montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(C_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1} .

VI - Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer par récurrence que : $U_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite (U_n) est croissante

(on remarquera graphiquement que $h(x) \geq x$ pour tout x dans $]-\infty; 0]$)

Déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.