

Exercice 1 : 12,5 pts

Calculer les limites suivantes :

10x1,25p

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2022x + 2021}{x+1}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} - 2 \right)$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{x}$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{1+x^2} + x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x^2} - 3}{x^4 - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-5}{x^2 - 3x + 2}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x - 1} - x$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} - 5}{x}$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Exercice 2 : (07,5 pts)Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1p 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$

1p 2) Montrer que (u_n) est croissante

3) Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n^2 - 2$

1p a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

1p b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n

1p c) Calculer $s_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$

4) Soit la suite (w_n) définie par :
$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + v_n \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Et on pose $t_n = 2^n w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1p a) Montrer que (t_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$

1p b) Exprimer t_n puis w_n en fonction n

0,5p c) Calculer $\sum_{k=1}^n 2^k w_k$ en fonction de n .