

**Exercice 1.**

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- 1)  $P: "\forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0"$
- 2)  $P: "\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0"$
- 3)  $P: "x \in [1; 2["$
- 4)  $P: "\forall n \in \mathbb{N}: \frac{n}{2} \in \mathbb{N}"$
- 5)  $P: "( \forall x \in \mathbb{R} ); -1 \leq \cos x \leq 1"$
- 6)  $P: "( \forall n \in \mathbb{N} )( \exists m \in \mathbb{N} ): n < m"$
- 7)  $P: "( \exists n \in \mathbb{N} ): 2n + 1 \text{ est pair}"$
- 8)  $P: "\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{n} \in \mathbb{N}"$
- 9)  $P: "( \forall x \in \mathbb{R} )( \exists y \in \mathbb{R} ): x - y < 0"$
- 10)  $P: "( \exists! x \in \mathbb{R} ): 2x + 4 = 0"$
- 11)  $P: "( \exists! x \in \mathbb{R} ): x^2 = 2"$
- 12)  $P: "( \exists x \in \mathbb{Z} ): \frac{x}{4} \in \mathbb{Z} "$
- 13)  $P: "( \forall x \in \mathbb{R} )( \exists y \in \mathbb{R} ): y^2 = x"$

**Exercice 2**

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

**Exercice 3**

$x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ ; Montrer que :  $\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 0 \leq y < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$ .

**Exercice 4**

$x \in \mathbb{R}^+$ ; Montrer que :  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

**Exercice 5**

- 1) Montrer que :  $( \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 ); a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$
- 2)  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^+$ ; Montrer que :  $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

**Exercice 6**

Montrer que :  $( \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 ); a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

**Exercice 7**

Montrer que si  $a \in \mathbb{Q}$  et  $b \in \mathbb{Q}$  alors  $a + b \in \mathbb{Q}$

### Exercice 8

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  par :  $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$

Montrer que :  $|x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}|x-1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x-1|$

### Exercice 9

Montrer que :  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

### Exercice 10

Montrer que :  $\forall x \in [-2; 2] : 2\sqrt{2} > \sqrt{4-x^2}$  .

WWW.GUESSMATHS.CO