

Problème : (11 points)

Partie I:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

1. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$
 b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x) = x$.
 c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq x \Leftrightarrow x \leq \ln(e-1)$
2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et interpréter géométriquement les résultats obtenus.
 b) Montrer que $g'(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
 c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe de g au voisinage de $-\infty$.
3. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; g(x) \geq 0$
 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 1 + x \geq \ln(1 + e^x)$, puis déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; e \times e^x - 1 \geq e^x$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 2(x-1)e^x & ; \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 2\sqrt{\ln(x)} & ; \text{si } x > 1 \end{cases}$$

, et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

1. a) Montrer que f est continue en 1.
 b) Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 d) Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- e) Montrer que :
$$\begin{cases} f'(x) = 2xe^x & ; \text{si } x < 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} & ; \text{si } x > 1 \end{cases}$$
- f) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
 g) Calculer $f''(x)$ et montrer que (C_f) admet un unique point d'inflexion d'abscisse négative.

h) Tracer (C_f) .

2. a) En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales $I = \int_0^1 (x-1)e^x dx$ et

$$J = \int_1^e \ln(x) dx$$

b) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

c) En cm^3 , calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de (C_f) sur l'intervalle $[1; e]$.

Partie III

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$ et $u_{n+1} = 1 - \ln(1 + e^{-u_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \ln(e-1)$

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Dédurre que (u_n) est convergente ; puis calculer sa limite.

Exercice 1: (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points

$A(1; 0; 1)$; $B(2; 1; 1)$ et $C(-1; 2; -3)$.

1. Calculer la distance AB .

2. Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$. Est-ce que les points A ; B et C sont alignés? Justifier?

3. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; déduire que le triangle ABC est rectangle en A ?

4. Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y - z = 0$.

5. Considérons (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 6 = 0$$

a) Montrer que (S) est une sphère dont le centre $\Omega(-1; 1; -2)$ et de rayon $R = 4$.

b) Calculer la distance de l au plan (ABC) . Puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de centre H à déterminer et de rayon r à calculer.

Exercice 2: (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0, 1, i)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + 2i$; $b = i$; $c = 3i$ et $d = 1 + 2i$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 12z + 72 = 0$

2. a) Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = -i$

b) Dédurre que $AC = AB$ et déterminer une mesure de l'angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$, puis déterminer la nature du triangle ABC .

- c) Calculer $(d - b)(a - b)$ et déduire que $BD \times AB = 2$
3. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$.
- a) Montrer que : $z' = \sqrt{2}z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) + 1 + 2i$
- b) Montrer que l'affixe d du point D l'image de B par la rotation R est $d = 1 - (\sqrt{2} + 2)i$
- c) On considère le point H d'affixe $h = -5i$.
Calculer $\frac{h - c}{b - c}$ et déduire que les points H , C et B sont alignés
- d) Montrer que H est l'image de B par une homothétie de centre C et de rapport k à déterminer.
4. On considère les points K et L d'affixes respectives $k = -1 + 2i$.
Montrer que $ABKC$ est un losange

Exercice 3: (3 points)

Une urne contient. 7 boules indiscernables au toucher: 4 boules blanches et 3 boules noires.
On tire au hasard 2 boules successivement et sans remise.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
- a) A : «Tirer deux boules de même couleur »
- b) B : «Tirer au moins une boule noire »
- c) C : «La deuxième boule tirée est blanche »
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules noires tirées.
- a) Donner la loi de probabilité de la variable X
- b) Calculer $E(X)$; $E(X^2)$; en déduire $V(X)$ et $\sigma(X)$.