Série n° 1 d'exercices sur continuité et limites **2éme Bac SM**

Exercice 1 :

Soit $f:]-1;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$

Déterminer les limites de f, si elles existent, en 0 *et en* $+\infty$.

Exercice 2 :

Soit $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :* $f(x) = xE\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

Montrer que f admet une limite en 0 *et déterminer cette limite.*

Exercice 3 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(0) = 0$ *et* $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ *si* $x \neq 0$

Etudier la continuité de f en 0 .

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f_n *une fonction définie sur* $[0;1]$ *par :* $f_n(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - x^n$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0;1]$ *telle que* $f_n(x_n) = 0$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) > 0$,

3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est monotone et qu'elle converge vers une limite l.*

4. Supposons qu'il existe M ∈ $\mathbb{R}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *; 0 ≤ xn ≤ M < 1* $0 \le x_n \le M < 1$

a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

b. Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 5 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} & si \ \ x < 0 \\ f(0) = 0 & \\ f(x) = x^2 + 1 & si \ \ x > 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de la fonction f en 0

2. Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0

3. Calculer $f'(x)$ *sur le domaine de dérivabilité de f.*

Exercice 6 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)$, $|f(x) - f(y)| \le |\sin(x) - \sin(y)|$

1. Montrer que la fonction f est 2π *-périodique.*

WWW.GUESSMATHS.CO

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 7 :

Soit $f;g$ et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right) , \; si \; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} g(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right) , \; si \; x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) , \; si \; x\neq 0 \\ h(0)=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} k(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) , \; si \; x\neq 0 \\ k(0)=0 \end{cases}$$

Etudier la continuité puis la dérivabilité de chacune des fonction f ;g et h en 0.

Exercice 8 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=ax+b \quad si \quad x\leq 0 \\ f(x)=\frac{1}{1+x} \quad si \quad x>0 \end{cases}$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.