Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

1/a- Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b- Etudier la dérivabilité de f au point $x_0=0$ *à droite. Interpréter géométriquement le résultat.*

c- Calculer $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}$.

2/ Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[\ \ f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}$ *puis dresser le tableau de variation de* f.

3/ Soit $\left(C_f\right)$ *la courbe de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm).*

- *a- Etudier les branches infinies de* $\left(C_f\right)$
- *b- Résoudre dans IR l'équation :* $f(x)=x$.
- *c- Construire la courbe* $\left(C_f\right)$.

(On accepte que le point $A\left(\dfrac{4}{9},\dfrac{3}{4}\right)$ *est un point d'inflexion et que* $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\simeq 2,6$ *)*

4/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[0,4[$.

- *a- Montrer que g admet une fonction réciproque* g^{-1} *sur un intervalle J à déterminer.*
- *b- Donner l'expression de* g^{-1} *pour tout x dans J.*
- *c- Construire dans le même repère* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *la courbe de la fonction* g^{-1}.

Correction Exercice 3 :

On a : $f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

1/ a- $D_f=\left\{x\in IR/2-\sqrt{x}\neq 0 \text{ et } x\geq 0\right\}$

$\Rightarrow D_f=\left\{x\in IR/\sqrt{x}\neq 2 \text{ et } x\geq 0\right\}$

$\Rightarrow D_f=\left\{x\in IR/x\neq 4 \text{ et } x\geq 0\right\}$

$\Rightarrow D_f=[0,4[\cup]4,+\infty[$

b- Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2-2+\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite du point $x_0=0$

<u>Interprétation géométrique :</u>

La courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse $x_0=0$ *dirigée vers le haut.*

c- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0;\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-\infty$

2/ On a : $\forall x\in \left]0,4\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2-\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{-\left(2-\sqrt{x}\right)'}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$$

Donc : $\forall x\in \left]0,4\right[\cup\left]4,+\infty\right[\ \ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$

D'où $\left(\forall x\in D_f-\{0\}\right)\ f'(x)>0$ *f est croissante sur* $\left]0,4\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

Tableau de variation de f :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	0

3/ a- On a : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \infty$ *donc la droite d'équation x=4 est une asymptote verticale à la courbe* $\left(C_f\right)$ *au voisinage de* $+\infty$*.*

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *donc la droite d'équation y=0 (càd l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à* $\left(C_f\right)$ *au voisinage de* $+\infty$*.*

b- Soit l'équation $f(x) = x$ *alors :*

$$\left(x \in IR / \ f(x) = x\right) \Leftrightarrow \left(x \in D_f\right) \frac{1}{2-\sqrt{x}} = x$$

$$\Leftrightarrow 2x - x\sqrt{x} = 1 \ \left(x \in D_f\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - x\sqrt{x} - 1 = 0 \ \left(x \in D_f\right)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 2x + 1 = 0 \ \left(x \in D_f\right)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - x + 1 - x = 0 \ \left(x \in D_f\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x} - 1\right) + \left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right) = 0 \ \left(x \in D_f\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}-1\right)=0$$

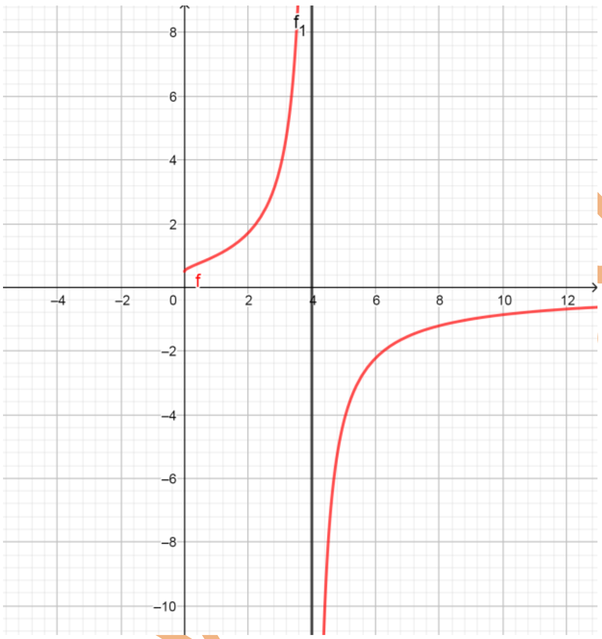
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=1\\ x-\sqrt{x}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$\left(\text{car } \Delta=5 \text{ pour l'équation } t^2-t-1=0 \text{ on pose } \sqrt{x}=t \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2}<0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ x=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

Donc : $S=\left\{1;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

c- Construction de $\left(C_f\right)$



4/ g la restriction de f sur $I=\left[0,4\right[$

a- la fonction g est continue strictement croissante sur I donc elle admet une fonction réciproque définie sur un intervalle :

$$J=f(I)=\left[f(0);\lim_{x\to 4^-} f(x)\right[$$

b- On a :

$$\begin{cases} g^{-1}(x)=y \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y) \\ x\in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y}=2x-1 \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x\sqrt{y}=1 \\ x\in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\left(\dfrac{2x-1}{x}\right) \\ x\in J \end{cases}$$

D'où $\left(\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[\right) \qquad g^{-1}(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)$