Exercice 1 :

Soit $p \in \mathbb{N}$

1) *Vérifier que :* $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$

2) *Calculer* $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$

Correction

1) *Soit* $p \in \mathbb{N}$

On pose : $\begin{cases} \beta = \arctan(p) \\ \alpha = \arctan(p+1) \end{cases}$ *et* $\begin{cases} -\arctan(p) \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right] \\ \arctan(p+1) \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Donc $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

$$= \frac{\tan(\arctan(p+1)) - \tan(\arctan(p))}{1+\tan(\arctan(p+1))\tan(\arctan(p))}$$

$$= \frac{p+1-p}{1+p(p+1)}$$

$$= \frac{1}{p^2+p+1}$$

D'où $\alpha - \beta = \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$

Par suite $(\forall p \in \mathbb{N})$ *;* $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$

2) *On a pour tout* $p \in \mathbb{N}$: $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{n} \arctan(p+1) - \arctan(p) = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) = \sum_{p=0}^{n} \arctan(p+1) - \sum_{p=0}^{n} \arctan(p)$$

D'où $\sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) = \sum_{p=1}^{n+1} \arctan(p) - \sum_{p=0}^{n} \arctan(p)$

$$= \arctan(n+1) - \arctan(0) + \cancel{\sum_{p=0}^{n} \arctan(p)} - \cancel{\sum_{p=0}^{n} \arctan(p)}$$

$$= \arctan(n+1)$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) = \arctan(n+1)$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ *par :* $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}\right)$

1) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\left(\exists! \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right) / \sqrt{x} = \tan(\alpha)$

2) *En déduire que* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{x}\right)$

3) *En déduire que* $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

4) a) *Montrer que f admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer.*

b) *Donner l'expression de* f^{-1} *pour tout* $x \in J$.

5) a) *Vérifier que* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$

b) *Calculer* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ *et* $\lim_{x\to 0^+} x f^{-1}(x)$

Correction

1) *Soit* $x \in \mathbb{R}^+$

La fonction $t \mapsto \tan(t)$ *réalise une bijection de* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *vers* $\tan\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}^+$

Et comme $\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$ *; donc d'après le théorème de la bijection* $\left(\exists!\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) / \sqrt{x}=\tan(\alpha)$

Par suite $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$ *;* $\left(\exists!\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) / \sqrt{x}=\tan(\alpha)$

2) *Soit* $x \in \mathbb{R}^+$

$f(x)=\arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}\right)$ *; on pose* $\sqrt{x}=\tan(\alpha)$ *où* $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x}=\tan(\alpha) &\Rightarrow x=\tan^2(\alpha)\\
&\Rightarrow x+1=1+\tan^2(\alpha)\\
&\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}\\
&\Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{1}{|\cos\alpha|} \quad \textit{(or } \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\alpha>0\\
&\Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{1}{\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

Donc $f(x)=\arctan\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos\alpha}-\tan(\alpha)}{\frac{1}{\cos\alpha}+\tan(\alpha)}}\right)$

$=\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}}\right)$ *et* $\sin(\alpha)=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2t}{1+t^2}$ *en posant* $t=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$=\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}}\right)$$

$$= \arctan\left(\sqrt{\frac{\frac{t^2-2t+1}{1+t^2}}{\frac{t^2+2t+1}{1+t^2}}}\right)$$

$$= \arctan\left(\sqrt{\frac{(t-1)^2}{(t+1)^2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) \quad \textit{or } \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\ \textit{; donc } t-1<0$$

$$= \arctan\left(\frac{1-t}{t+1}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{1-\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2} \qquad \textit{et } \tan(\alpha)=\sqrt{x} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{x}$$

Donc $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$; $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\sqrt{x}}{2}$

Pour $x=3$ *; on a :* $f(3) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}+\sqrt{3}}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\right) = \frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\left(2-\sqrt{3}\right)\right) = \frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

4) a) *On a :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right)\ ;\ f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{\arctan\sqrt{x}}{2}$

La fonction $u : x\mapsto\sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^{+}$ *et* $u\left(\mathbb{R}^{+}\right)\subset\mathbb{R}$

La fonction $x\mapsto\arctan x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$

La fonction $x\mapsto\arctan\sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^{+}$

D'où La fonction $x\mapsto f(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^{+}$

La fonction $u : x\mapsto\sqrt{x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_{+}^{*}$

La fonction $x\mapsto\arctan x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *; en particulier sur* $\mathbb{R}_{+}^{*}$

D'où La fonction $x\mapsto f(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{+}$ *; et pour tout* $\mathbb{R}_{+}^{*}$ *on a :*

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+\sqrt{x}^{2}}$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{x}(1+x)}$$

D'où $\left(\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}\right)\ ;\ f'(x)<0$

Donc f est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ *; alors elle admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur un intervalle* $J=f\left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right)$

$$=f\left(\left]0;+\infty\right[\right)$$

$$=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);f(0)\right[$$

$$=\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$$

b) *Soit* $x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ *et* $y\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ *; on a :* $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(y)=x$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{\arctan\sqrt{y}}{2}=x$$

$$\Leftrightarrow\frac{\arctan\sqrt{y}}{2}=\frac{\pi}{4}-x$$

$$\Leftrightarrow\arctan\sqrt{y}=\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

Comme $x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ alors $0<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<-2x<0$

$$\Rightarrow 0<\frac{\pi}{2}-2x<\frac{\pi}{2}$$

D'où $\arctan\sqrt{y}=\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\sqrt{y}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$$\Leftrightarrow y=\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{\tan^2(2x)}$$

Par suite $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right)$; $f^{-1}(x)=\frac{1}{\tan^2(2x)}$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right) & si\ x>1 \\ f(x)=\pi+\sqrt[3]{1-x^3} & si\ x\leq 1\end{cases}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) Montrer que $\left(\forall\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}$

4) Montrer que $\left(\forall x\in\left]1;+\infty\right[\right)\left(\exists!\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)/\ \sqrt{x-1}=\tan(\alpha)$

5) En déduire que $\left(\forall x\in\left]1;+\infty\right[\right)$; $f(x)=\pi-2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right)$

6) Etudier les variations de f.

7) Soit g la restriction de f sur $\left]-\infty;1\right]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) déterminer g^{-1} pour tout $x\in J$.

8) Construire dans un même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{g^{-1}}\right)$

Correction

$$\begin{cases} f(x) = 4\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right) & si\ x>1 \\ f(x) = \pi + \sqrt[3]{1-x^3} & si\ x\le 1 \end{cases}$$

1) ► *La fonction* $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)$ *est bien définie sur* $]1;+\infty[$ *car* $x-1>0$; $x>0$ *et* $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}>0$

► *La fonction* $x \mapsto \pi + \sqrt[3]{1-x^3}$ *est bien définie sur* $]-\infty;1]$ *car* $x\le 1 \Rightarrow 1-x^3\ge 0$

D'où $D_f =]-\infty;1] \cup]1;+\infty[= \mathbb{R}$

2) ► $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \pi + \sqrt[3]{1-x^3} = +\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x^3 = +\infty$ *)*

► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)\right) = 0$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right) = 0$ *et la fonction* $x\mapsto \arctan(x)$ *est continue en* 0.

3) *Soit* $\beta \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *; on a :* $0<\beta<\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4}-\beta < \dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \left(\frac{\pi}{4}-\beta\right) < \frac{\pi}{4}$$

D'où $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right).\tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}$

$$= \frac{1-\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{1-\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{1-\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}\times\frac{1}{\frac{\left(1+\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^2}{1+\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}}$$

$$=\cos(\beta)\times\frac{1}{\frac{1+\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}}$$

$$=\cos(\beta)\times\frac{1}{1+\frac{2\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}}$$

$$=\cos(\beta)\times\frac{1}{1+\sin\beta}$$

D'où $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\cos(\beta)}{1+\sin\beta}$

Donc $\left(\forall\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}$

4) *Soit* $x\in\left]1;+\infty\right[$ *; on a :*

La fonction $t\mapsto\tan(t)$ *réalise une bijection de* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *vers* $\tan\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}^+$

Et comme $\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}^+$ *; donc d'après le théorème de la bijection*

$\left(\exists!\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)/\ \sqrt{x-1}=\tan(\alpha)$

D'où $\left(\forall x\in\left]1;+\infty\right[\right)\left(\exists!\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)/\ \sqrt{x-1}=\tan(\alpha)$

5) *On a pour tout* $x\in\left]1;+\infty\right[$ *; on pose :* $\sqrt{x-1}=\tan(\alpha)$ *où* $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\sqrt{x-1}=\tan(\alpha)\Rightarrow x-1=\tan^2(\alpha)$$
$$\Rightarrow x=1+\tan^2(\alpha)$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{\cos(\alpha)}\ \textit{(car } \alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\cos(\alpha)>0\textit{)}$$

Et $f(x)=4\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)$

$$=4\arctan\left(\frac{1}{\tan(\alpha)+\dfrac{1}{\cos(\alpha)}}\right)$$
$$=4\arctan\left(\frac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}\right)$$
$$=4\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
$$=\pi-2\alpha$$

Et $\sqrt{x-1}=\tan(\alpha)\Rightarrow\alpha=\arctan\left(\sqrt{x-1}\right)$

Donc $(\forall x\in]1;+\infty[)\ ;\ f(x)=\pi-2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right)$

***6)** Etude des variations de f.*

► *Pour tout* $x\in]1;+\infty[$ *; on a :* $f(x)=\pi-2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right)$

D'une part la fonction $u:x\mapsto\sqrt{x-1}$ *est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et* $u(]1;+\infty[)=\mathbb{R}_+^*$

D'autre part la fonction $x\mapsto\arctan(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *en particulier sur* $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivable sur $]1;+\infty[$ *comme composée de deux fonctions dérivables ; et*

Pout tout $x\in]1;+\infty[$ *; on a :* $f'(x)=2\times\dfrac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$

$$=\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}$$

Donc $(\forall x\in]1;+\infty[)\ ;\ f'(x)>0$

Par suite f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

►*Pour tout* $x \in \left]-\infty;1\right]$ *; on a :* $f(x) = \pi + \sqrt[3]{1-x^3}$

La fonction $x \mapsto 1-x^3$ *est continue dérivable sur* $\mathbb{R}$ *en particulier sur* $\left]-\infty;1\right]$ *et la fonction* $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ *est continue dérivable sur* $\left]-\infty;1\right[$

Donc f est continue dérivable sur $\left]-\infty;1\right[$ *; et pour tout* $x \in \left]-\infty;1\right[$ *on a :*

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{3\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}$$

$$= \frac{-x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}$$

Donc $\left(\forall x \in \left]-\infty;1\right[\right)$; $f'(x) \leq 0$

Par suite f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;1\right]$

7) *Soit g la restriction de f sur* $\left]-\infty;1\right]$

a) *g est continue strictement décroissante sur* $\left]-\infty;1\right]$ *; donc elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle* $J = f\left(\left]-\infty;1\right]\right)$

$$= \left[f(1); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$$

$$= \left[\pi;+\infty\right[$$

b) *pour tout* $x \in \left[\pi;+\infty\right[$ *et* $y \in \left]-\infty;1\right]$ *; on a :*

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + \sqrt[3]{1-y^3}$$

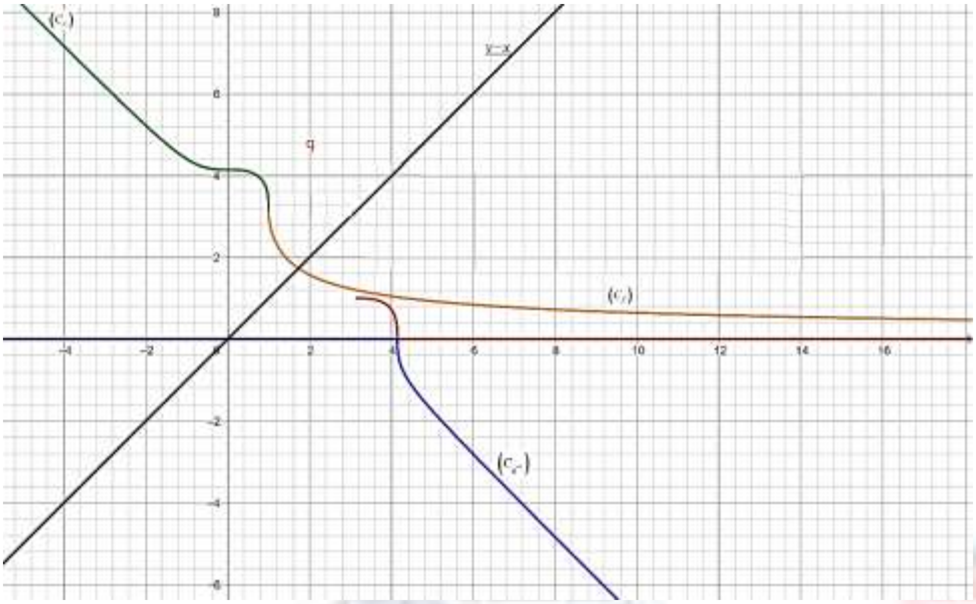
$$\Leftrightarrow 1-y^3 = (x-\pi)^3$$

$$\Leftrightarrow y^3 = 1-(x-\pi)^3$$

Donc si ► $x \in \left[\pi;\pi+1\right[$; $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-(x-\pi)^3}$

► $x \in \left[\pi+1;+\infty\right[$; $g^{-1}(x) = -\sqrt[3]{(x-\pi)^3-1}$

8) *Construction de* $\left(C_f\right)$ *et* $\left(C_{g^{-1}}\right)$



(C_f)
$y=x$
$(C_{f^{-1}})$