Sujet de révision n°4

Exercice 1

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

les points A(0,1,-1) , B(-2,0,-1) et C (-2,1,0)

1- a) *montrer que le point* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ *;puis que les points A ,B et C ne sont pas alignés .*

b) *Calculer la surface du triangle ABC .*

c) *montrer que* $x-2y+2z+4=0$ *est une équation cartésienne du plan (ABC)*

2- *Soit la sphère* (S) *de centre* Ω*(3,1,-1) et qui passe par A .*

a) *montrer que* $x^2+y^2+z^2-6x-2y+2z+4=0$ *est une équation cartésienne de la sphère* (S).

b) *Calculer* $d(\Omega,(ABC))$ *puis déduire que le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle* (Γ).

c) *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par Le point* Ω *et qui est perpendiculaire au plan (ABC) .*

d) *Déterminer le centre et le rayon du cercle* (Γ).

Exercice 2

1. *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* ℂ *l'équation:*

$$z^2-8z+17=0$$

2. *On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ *les points A et B d'affixes respectives* $a=4+i$ *et* $b=8+3i$.

Soit la rotation R de centre Ω *d'affixe* $\omega=1+2i$ *et d'angle* $\dfrac{3\pi}{2}$ *et soit z' l'affixe du point M' image de M d'affixe par la rotation R .*

a) montrer que : $z'=-iz-1+3i$

b) vérifier que l'affixe de C image de A par la rotation R est $c=-i$

c) montrer que : $b-c=2\left(a-c\right)$

et déduire que les points A, B et C sont alignes .

Exercice 3

On considère la suite (U_n) *définie par :* $U_0=\dfrac{1}{2}$ *et* $U_{n+1}=\dfrac{8U_n+3}{U_n+6}$.

1. a) *Montrer que :* $(\forall n\in IN)\quad 1\leq U_n\leq 3$.

   b) *Montrer que la suite* (U_n) *est croissante puis déduire qu'elle est convergente .*

2. *On pose :* $V_n=\dfrac{U_n-3}{U_n+1}\qquad(\forall n\in IN)$.

   a) *Montrer que* $\left(V_n\right)$ *est une suite géométrique .*

b) Ecrire V_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = V_1 + V_2 + \cdots\cdots + V_n$.

<u>Exercice 4</u>

1- On considère l'intégrale : $K = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\, dx$.

En utilisant une intégration par parties montrer que : $K = \dfrac{e^{\pi} - 1}{5}$.

2- On considère les intégrales : $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx$.

a) Calculer (I+J) et (I - J).

b) Déduire la valeur de I et celle de J.

3- Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$; puis déduire d'une façon directe la valeur de I et celle de J En utilisant la linéarisation et le résultat de la première question .

<u>Problème</u>

I. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

1- Calculer la fonction dérivée de f et étudier ces variations .

2- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3- Dresser le tableau de variation de f et étudier son signe sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

4- Construire la courbe (C_f)de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ $\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{ij}\| = 5cm\right)$.

II. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

1- Calculer la fonction dérivée de g et déduire de la partie **I.**les variation de g .

2- Vérifier que g=h$\circ$k tel que h et k sont deux fonctions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ et $k(x) = \dfrac{1}{x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3- Dresser le tableau de variation de g .

III. 1- On considère α un réel tel que : $\alpha > 1$. On pose $\mathring{A}(\alpha)$ l'aire de la partie H du plan délimitée par (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Calculer $\mathring{A}(\alpha)$ en fonction de α .

2- Soit la suite (U_n) définie sur IN^*par : $U_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.(on remarque que : $\ln(U_n) = g(n)$).

Montrer que la suite (U_n) est croissante , puis déduire qu'elle est convergente et Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$