Exercice 10 « Fonction Exponentielle »

Exercice 1

Partie I

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=xe^{x}-2$

1) Dresser le tableau des variations de g

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ *admet, dans IR une unique solution* α *et que* $0{,}8<\alpha<0{,}9$.

b) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

Partie II

On Considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^{x}-2x}{e^{x}+2}$ *et on désigne par* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

b) Montrer que la droite Δ *d'équation* $y=-x$ *est une asymptote à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_f) *et la droite* Δ .

2) a) Montrer que pour tout réel x on a: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que : $f(\alpha)=1-\alpha$.

3) Tracer la courbe (C_f) *et l'asymptote* Δ.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f)*, la droite* Δ *et les droites d'équations* $x=-1$ *et* $x=0$

a) Montrer que pour tout $x\in[-1;0]$ *on a :* $\dfrac{1}{3}(x+1)e^{x}\leq\dfrac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2}\leq\dfrac{e^{x}}{e^{x}+2}$

b) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^{0}(x+1)e^{x}dx$

c) Montrer alors que : $\dfrac{1}{3e}\leq A\leq\ln\left(\dfrac{3e}{1+2e}\right)$

Correction exercice1

Partie I

1) $g(x)=xe^{x}-2$. *g est dérivable sur IR et* $(\forall x\in IR)$, $g'(x)=e^{x}+xe^{x}=(1+x)e^{x}$.

$g'(x)$ *est du signe de* $(1+x)$; *car* $(\forall x\in IR)$ $e^{x}>0$

D'où Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-1}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

a) ■ $\forall x \in]-\infty;-1]$; $g(x) \in [-e^{-1}-2;-2[$ *donc* $g(x) \neq 0$

■ *Sur* $[-1;+\infty[$ *g est continue et strictement croissante et*

$g([-1;+\infty[) = [g(-1); \lim_{x\to+\infty} g(x)[= [-e^{-1}-2;+\infty[$ *; or* $0 \in [-e^{-1}-2;+\infty[$

Donc il existe et unique α *dans* $[-e^{-1}-2;+\infty[$ *tel que :* $g(\alpha)=0$ *et puisque :*

$g(0,8) \simeq -0,22$ *et*

$g(0,9) \simeq 0,21$ *alors* $g(0,8)\times g(0,9) < 0$ *: d'où* $0,8 < \alpha < 0,9$.

b) ■ $(\forall x \in]-\infty;\alpha[)$; $g(x) < 0$

■ $(\forall x \in]\alpha;+\infty[)$; $g(x) > 0$. *et* $g(\alpha) = 0$.

<u>Partie II</u>

1) a) $(\forall x \in IR)$ $f(x) = \dfrac{e^x(1-2xe^{-x})}{e^x(1+2e^{-x})} = \dfrac{1-2xe^{-x}}{1+2e^{-x}}$

Or $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = -\lim_{x\to+\infty}(-x)e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} te^{t} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-2x}{e^x+2} + x$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - \cancel{2x} + xe^x + \cancel{2x}}{e^x+2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + xe^x}{e^x+2} = 0$$

(Car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ *)*

Donc la droite Δ *d'équation* $y=-x$ *est une asymptote à* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.

c) $(\forall x \in IR)$, $f(x)+x = \dfrac{e^x+xe^x}{e^x+2} = \dfrac{e^x}{e^x+2}(1+x)$ *donc* $f(x)-(-x)$ *est du même signe que* $(1+x)$

.

(Car $(\forall x \in IR)$; $\dfrac{e^x}{e^x+2} > 0$ *)*

Alors la courbe (C_f) *est au-dessous de* Δ *sur* $]-\infty;-1]$ *et au-dessus de* Δ *sur* $[-1;+\infty[$.

2) a) $(\forall x \in IR)$, $f'(x) = \dfrac{(e^x-2)(e^x+2)-e^x(e^x-2x)}{(e^x+2)^2}$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} - 4 - \cancel{e^{2x}} + 2xe^x}{(e^x+2)^2}$$

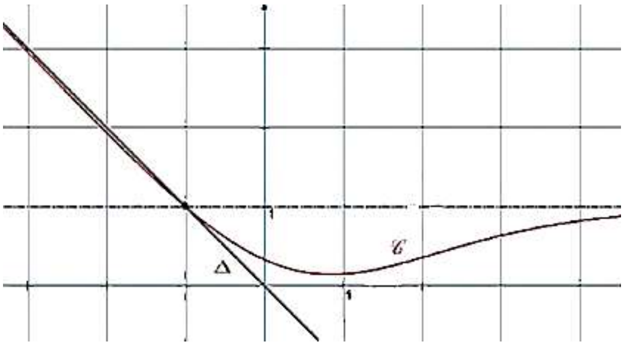
$$= \frac{2(xe^x-2)}{(e^x+2)^2}$$

$$= \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

D'où $f'(x)$ *est du signe de* $g(x)$ *sur IR ; donc d'après la question <u>Partie I</u>1)b) on dresse le tableau de variation de f comme suivant :*

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

On $g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha e^{\alpha}-2=0 \Rightarrow e^{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}$; d'où : $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-2\alpha}{e^{\alpha}+2}=\dfrac{\frac{2}{\alpha}-2\alpha}{\frac{2}{\alpha}+2}=\dfrac{(1-\alpha^2)}{1+\alpha}=1-\alpha$



4) a) $-1\le x\le 0 \Rightarrow 0<e^x\le 1 \Rightarrow 2<e^x+2\le 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\le\frac{1}{e^x+2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{(x+1)e^x}{3}\le\frac{(x+1)e^x}{e^x+2}$$

Et $x+1\le 1 \Rightarrow \dfrac{e^x}{e^x+2}(x+1)\le\dfrac{e^x}{e^x+2}$ $\left(Car : \dfrac{e^x}{e^x+2}>0\right)$.

Donc $\forall x\in[-1;0]$ $\dfrac{(x+1)e^x}{3}\le\dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2}\le\dfrac{e^x}{e^x+2}$.

b) On pose $\begin{cases} u(x)=x+1 \Rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=e^x \Rightarrow v(x)=e^x \end{cases}$

donc : $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)e^x dx=\left[(x+1)e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^x dx$

$$=1-\left[e^x\right]_{-1}^{0}$$

$$=1-1+e^{-1}$$

$$=\frac{1}{e}$$

c) $A=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(f(x)+x\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)e^x}{e^x+2}dx$

et $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{e^x+2}dx=\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_{-1}^{0}=\ln 3-\ln\left(e^{-1}+2\right)=\ln\left(\frac{3}{e^{-1}+2}\right)$

On a ; $\forall x\in[-1;0]$ $\dfrac{(x+1)e^x}{3}\le\dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2}\le\dfrac{e^x}{e^x+2}$ donc :

$$\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)e^x}{3}dx\le A\le\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{e^x+2}dx\Rightarrow\frac{1}{3e}\le A\le\ln\left(\frac{3}{e^{-1}+2}\right)$$