Exercice 1

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; les vecteurs $\vec{u}(1;1;2)$ et $\vec{v}\left(-1;0;\frac{1}{2}\right)$; les points $A(1;0;2)$; $B(-1;-2;-3)$ et $C(-3;2;5)$

Déterminer une équation du plan (P) passant pour A et dirigé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

2) a) Montrer que la droite (AB) n'est pas perpendiculaire au plan (P).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à (P) et passant par A et B.

c) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection du (P) et le plan (Q).

3) Soit (S) la sphère dont l'un diamètre est $[AB]$.

a) Donner une équation cartésienne de (S).

b) Soit (R) le plan d'équation $x+y-3z+2=0$.

Montrer que (R) coupe la sphère et déterminer leur intersection.

4) On considère les points C et D tels que : $\overrightarrow{OC}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OD}=\vec{v}$

5) Calculer l'aire du triangle OCD.

Exercice 2

On dispose de 3 ure U_1; U_2 et U_3; telles que:

U_1 : Contient I boule Blanche et 9 boules Noires.

U_2 : Contient 2 boules Blanches et 8 boules Noires.

U_3: Contient 3 boules Blanches et 7 boules Noires.

L'expérience consiste à choisir au hasard une urne, puis tirer 2 boules simultanément de cette urne.

1) Calculer la probabilité des événements suivants:

B" tirer deux boules Blanches"

C" les deux boules tirées tout de même couleur"

2) Soit X la variable aléatoire qui est liée au nombre de boules Blanches tirées.

a) Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X.

b) Donner loi la de probabilité de X.

c) Calculer $E(X)$; $V(X)$ et $\sigma(X)$.

d) Justifier que $P(X>2)=0$

Exercice n°4:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-2z+2=0$

a) Montrer que le nombre complexe $z_1=1+i$ est une solution de l'équation (E) et déduire la deuxième solution z_2.

b) Montrer que $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et en déduire la forme exponentielle de 22.

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$

a) Déterminer la nature du triangle OAB

b) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r d'angle π et de centre I le milieu du segment $[AB]$

c) En déduire que $r(A)=B$

3- Soit a le nombre complexe tel que : $a^6=z_1{}^2$

a) Montrer que $|a|=\sqrt[6]{2}$ et $\arg(a)=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

b) On prend $a=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Déterminer ω l'affixe du point W l'image du point $H(a^3)$ par T.

Problème

Partie I

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\ln(x^2-2x+2)$

1) Montrer que : $D_g=\mathbb{R}$

2) Montrer que la droite $x=1$ est un axe de symétrie pour la courbe de g.

3) Montrer $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$ et interpréter géométriquement le résultat.

4) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$; puis montrer que g est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$

5) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})$; $\ln(x)\geq-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$ et que $(\forall x\in\mathbb{R}^{*-})$; $\ln(-x)\geq-\ln\left(\frac{2x-2}{x}-x\right)$

6) a) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ que : $0<\alpha<1$.

b) Montrer que α solution de l'équation: $e^x-x^2+2x-2=0$

Partie II

On considère la fonction of définie par: $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que le point $A(1;0)$ est un point de symétrie pour (C_f).

2) Etudier la dérivabilité de f en 0 ;et interpréter géométriquement le résultat.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4) Etudier le branche infinie de (C_f) en $+\infty$; et déduire celle en $-\infty$.

5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et montrer que f est croissante sur $[1;+\infty[$; puis déduire sa monotonie sur $]-\infty;1]$.

6) a) Montrer que f admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que la fonction: $H: x\mapsto x-\dfrac{x^2}{2}+\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

7) Calculer l'aire du domaine du plan limité par (C_f); l'axe des abscisses; l'axe des ordonnées et le droite d'équation $x=1$.

8) Soit h la restriction de f sur $[1;+\infty[$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Montrer que: $h(\alpha)=\alpha^2-\alpha$; puis montrer que h^{-1} est dérivable en $\alpha^2-\alpha$ et Calculer $\left(h^{-1}\right)'\left(\alpha^2-\alpha\right)$.

Partie III

On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\ln\left(u_n{}^2-2u_n+2\right)\end{cases}$; pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le u_n\le 1$.

2) On suppose qu'il existe un réel $M\in]0;1[$ tel que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\alpha|\le M\times|u_n-\alpha|$.

Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_n-\alpha|\le\alpha\times M^n$.

3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite .