Correction du sujet bac session normale 2018

Exercice 1

les points $A(0,-2,-2)$; $B(1,-2,-4)$ *et* $C(-3,-1,2)$.

1. *On a :* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-3\\-2&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ *est normal au plan (ABC) donc on a :*

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC)\right)\ \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y+2\\z+2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2(y+2)+(z+2)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y+z+6=0$$

$2x+2y+z+6=0$ *est une équation cartésienne du plan (ABC).*

2. *la sphère* (S) *d'équation :* $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(S)\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+(y-0)^2+z^2-2z+1-25=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=25$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2}=5$$
$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|=5 \quad \text{avec } \Omega(1;0;1)$$
$$\Leftrightarrow \Omega M=5$$
$$\Leftrightarrow (S) \text{ est la sphère de centre } \Omega(1;0;1) \text{ et de rayon } R=5$$

3. *a) Soit* (Δ) *la droite qui passe par* $\Omega(1,0,1)$ *et qui est perpendiculaire au plan (ABC).*

Alors $\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(\Delta)$ *on a* $\overrightarrow{\Omega M}$ *et* $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ *sont colinéaires ;d'où :*

$$(\exists t\in IR)/\ \overrightarrow{\Omega M}=t\times(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2t\\ y=2t\quad (t\in IR)\\ z-1=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\quad (t\in IR).\\ z=1+t\end{cases}$$

D'où : $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\quad (\mathrm{t}\in \mathrm{IR})\\ z=1+t\end{cases}$ *est une représentation paramétrique de* (Δ) .

a) Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) *et du plan(ABC) Vérifient le système :*

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\\ 2x+2y+z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\\ 2(1+2t)+2(2t)+(1+t)+6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\\ 9t+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\\ t=-1\end{cases}\Leftrightarrow H\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$

3. *On a :* $d\left(\Omega;(ABC)\right)=\dfrac{\left|2x_\Omega+2y_\Omega+z_\Omega+6\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$

$$=\frac{|2\times1+2\times0+1+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{9}}$$

$$=3$$

le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle dont le centre est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC) or ce point est intersection de la droite (Δ) *et du plan(ABC) donc c'est le point H(-1 ;-2 ;0) et le rayon du cercle est :* $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Exercice 2

(Les nombres complexes)

1- *Soit l'équation :* $(E):2z^2+2z+5=0$

Le discriminant $\Delta=b^2-4ac=4-40=-36$

On a $\Delta<0$ *donc l'équation admet deux solutions complexes :*

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2\times 2} = \frac{-1-3i}{2}$$

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2\times 2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad et\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$D'où \quad S = \left\{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right); \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right\}$$

2- *R la rotation de centre O et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$

a) *On a :* $d = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

Donc : $d = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

b) *Soit* $A\left(a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$

On a : $B = R(A) \Leftrightarrow b = a\times e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow b = a\times\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow b = a\times d$$

3- *t la translation de vecteur* $\overrightarrow{OA}$.

a) *On a :* $C = t(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$

$$\Leftrightarrow c = b + a$$

On a : $c = b + a \Leftrightarrow c = d\times a + a$

$$\Leftrightarrow c = a.(d+1)$$

$$\Leftrightarrow c = a.\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow c = a.\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b) *On a :* $c = a.\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$Donc : \begin{cases} \dfrac{c}{a} = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \arg\left(\dfrac{c}{a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1 \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OC = OA \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

On conclut que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice 3

On tire simultanément 3boules de la caisse : $Card\Omega = C_9^3 = 84$

1- ■ *A « Les trois boules tirés sont de même couleur »*

On a : $CardA = C_5^3 + C_4^3 = 10 + 4 = 14$

$$P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

$$Donc : \boxed{P(A) = \frac{1}{6}}$$

■ *B « Les trois boules tirés portent le même numéros»*

On a : $CardB = C_3^3 + C_6^3 = 21$

$$P(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$

$$Donc : \boxed{P(B) = \frac{1}{4}}$$

■ *C « Les trois boules tirés sont de même couleur et portent le même numéros»*

On a : $CardC = C_3^3 + C_3^3 = 2$

$$P(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

$$Donc : \boxed{P(C) = \frac{1}{42}}$$

2- X la variable aléatoire liée à « Nombre de fois que l'événement A est réalisé »

a) Les paramètres de la variable aléatoire X sont :

- $n = 3$ *(nombre de fois qu'on répète l'expérience)*
- $p = P(A) = \dfrac{1}{6}$ *(la probabilité de l'événement A)*

b) • $P(X = 1) = C_n^1 \times p^1 \times (1-p)^{n-1}$

$$= n \times p \times (1-p)^{n-1}$$
$$= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1}$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{2}$$
$$= \frac{25}{72}$$

Donc : $\boxed{P(X=1) = \frac{25}{72}}$

- $P(X=2) = C_n^2 \times p^2 \times (1-p)^{n-2}$
$$= C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^{n-2}$$
$$= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}$$
$$= 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6}$$
$$= \frac{5}{72}$$

Donc : $\boxed{P(X=2) = \frac{5}{72}}$

Probléme

I- $(\forall x \in IR) \quad g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

tableau de variation de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

1. On a : $g(0) = e^0 - 0^2 + 30 - 1 = 1 - 1 = 0$

2. D'après le tableau de variation de g ; la fonction est strictement croissante sur IR et comme on a $g(0) = 0$ *alors on a :* $(\forall x \in]-\infty;0]) \quad g(x) \leq 0$ *et* $(\forall x \in [0;+\infty[) \quad g(x) \geq 0$

.

II- $(\forall x \in IR) \quad f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

1. a) $(\forall x \in IR) \quad \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x = \frac{x^2 - x}{e^x} + x$
$$= (x^2 - x)e^{-x} + x$$
$$= f(x)$$

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+x\right)$

$=+\infty \quad \left(car:\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0 \quad (n\in IN)\right)$

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+\cancel{x}-\cancel{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}\right)$

$=0$

On en déduit que (C) admet la droite (D) d'équation $y=x$ *comme asymptote oblique au voisinage de* $+\infty$.

c) $(\forall x\in IR)\quad \dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\dfrac{x^2-x}{e^x}+\dfrac{xe^x}{e^x}$

$=(x^2-x)e^{-x}+x$

$=f(x)$

- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}\right)$

$=+\infty \quad \left(Car:\lim\limits_{x\mapsto-\infty} xe^x=0 \ \ et \ \ \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty\right)$

d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left(\left(\dfrac{x^2-x}{x}\right)e^{-x}+1\right)$

$=-\infty$

$\left(Car:\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x}\right)=-\infty \ \ et \lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^{-x}=+\infty\right)$

<u>interpréter géométriquement</u>

(C) admet une branche parabolique au voisinage de -∞ de direction l'axe des ordonnées.

2- a) $f(x)-x=(x^2-x)e^{-x}$

Comme $(x\in IR)$ $e^{-x}>0$ *; Alors* $f(x)-x$ *et* (x^2-x) *ont le même signe sur IR.*

b) On a : ■ $(x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[)$ $x^2-x\geq 0$

$f(x)-x\geq 0$ *(C) est au-dessus de la droite (D) sur* $]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.

■ $(x\in[0;1])$ $x^2-x\leq 0$

$f(x)-x\leq 0$ *(C) est au-dessous de la droite (D) sur* $[0;1]$.

3- a) On a : $(\forall x\in IR)\quad f'(x)=\left((x^2-x)e^{-x}+x\right)'$

$$= (x^2 - x)'e^{-x} + (x^2 - x)\left(e^{-x}\right)' + 1$$
$$= (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x} + 1$$
$$= \left(3x - x^2 - 1\right)e^{-x} + e^{-x} \times e^{x}$$
$$= \left(e^{x} - x^2 + 3x - 1\right)e^{-x}$$
$$= g(x).e^{-x}$$

Donc : $(\forall x \in IR) \quad f'(x) = g(x).e^{-x}$

b) D'après la question I-2) on a : $\left(\forall x \in]-\infty;0]\right)\ g(x) \le 0$ *et* $\left(\forall x \in [0;+\infty[\right)\ g(x) \ge 0$

On en déduit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ *et croissante sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

c) tableau de variation de f

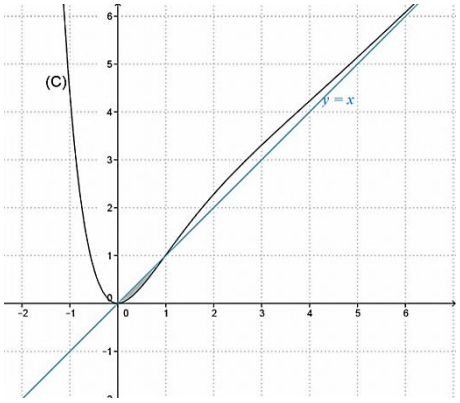
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4- a) On a pour tout x dans IR : $f''(x) = \left(g(x).e^{-x}\right)'$

$$= g'(x).e^{-x} - g(x).e^{-x}$$
$$= (e^{x} - 2x + 3)e^{-x} - (e^{x} - x^2 + 3x - 1)e^{-x}$$
$$= (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$$

b) On a : $(x^2 - 5x + 4) = (x-1)(x-4)$, *donc* $f''(x)$ *s'annule pour* $x = 1$ *et* $x = 4$ *alors les points d'abscisse respectifs 1 et 4 sont deux points d'inflexion de la courbe (C).*

5- Construction graphique de (C) et (D) dans le même repère $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



6- a) On a : $(\forall x \in IR) \quad H'(x) = \left((x^2 + 2x + 2)e^{-x}\right)'$

$$= (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$
$$= -x^2 e^{-x}$$

Donc : $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ *est une fonction primitive de la fonction* $h : x \mapsto -x^2 e^{-x}$ *sur IR .*

D'où : : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\left[H(x)\right]_0^1$

$$= -\left(H(1) - H(0)\right)$$
$$= -5e^{-1} + 2$$
$$= \frac{2e-5}{e}$$

b) On pose : $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

Donc : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(u'(x)v(x)\right)dx$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(1\times(-e^{-x})\right)dx$$
$$= -e^{-1} - \int_0^1 (-e^{-x})dx$$
$$= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1$$
$$= -e^{-1} - (e^{-1} - 1)$$
$$= 1 - 2e^{-1}$$
$$= \frac{e-2}{e}$$

D'où : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

c) Soit A l'aire en cm^2 *de la partie du plan délimitée par la courbe (C) la droite (D) et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$.

$A = \int_0^1 \left| f(x) - x \right| dx \quad (u.a)$

On sait que d'après ce qui précède $f(x) - x \le 0$ *sur* $[0;1]$

Donc : $A = \int_0^1 \left(x - f(x)\right)dx$

$$= \int_0^1 (x^2 - x)e^{-x}dx \quad (u.a)$$
$$= \int_0^1 x^2e^{-x} - dx\int_0^1 xe^{-x}dx \quad (u.a)$$
$$= \left(\frac{2e-5}{e} - \frac{e-2}{e}\right)cm^2$$
$$= \frac{e-3}{e}cm^2$$

III – *la suite numérique* (U_n) *définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que : $P(n)$ $(0 \le U_n \le 1$ *pour tout entier naturel n)* .

Initialisation

Pour n=0 on a : $0 \le U_0 = \frac{1}{2} \le 1$ *donc P(0) est vraie.*

hérédité

Pour $n \in IN$ on suppose que : $0 \le U_n \le 1$: P(n) est vraie.

Et montrons que : $0 \le U_{n+1} \le 1$: P(n+1) est vraie.

On a : $0 \le U_n \le 1$ et comme f est croissante sur $[0;1]$ alors :

$f(0) \le f(U_n) \le f(1) \Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 1$. D'où P(n+1) est vraie.

(On utilise le résultat de la question II-3-b))

2. *le résultat de la question II-2-b) on a : $f(x) - x \le 0$ sur $[0;1]$*

Donc : $(\forall n \in IN)$ $f(U_n) - U_n \le 0$ $(Car\ U_n \in [0;1])$

On en déduit que la suite (U_n) est décroissante

3. *La suite (U_n) est décroissante minorée par 0 donc convergente. Soit l sa limite. On a :*

$$\begin{cases} f(U_n) = U_{n+1} \\ f([0;1]) \subset [0;1] \\ f \text{ est continue sur } [0;1] \\ U_0 \in [0;1] \\ (U_n) \text{ est convergente} \end{cases}$$

Alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

la question II-2-b) on a : $f(x) = x$ pour les valeurs $x = 0$ et $x = 1$;or la suite (U_n) est décroissante et $U_0 = \frac{1}{2}$ donc : $l \le \frac{1}{2}$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$