guessmaths

Série n°4 sur « Notions de Logique » *1ére Bac SM*

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?
Donner leur contraposée et leur négation.
1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (2 \text{ divise } n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n\ 2 = n)$

Correction exercice 1 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$ est vraie.

Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 3) \Rightarrow (n < 5)$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 4) \Rightarrow (n \leq 4)$.
(On rappelle que $((P) \Rightarrow (Q)) \Leftrightarrow (\text{non}(P) \text{ ou } (Q))$ donc la négation de $((P) \Rightarrow (Q))$ est
$\text{non}\,((\text{non}(P) \text{ ou } (Q))) \Leftrightarrow (\text{non}(\text{non}(P)) \text{ et non}(Q)) \Leftrightarrow ((P) \text{ et non}(Q))$
$\text{non}((n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)) \Leftrightarrow ((n \geq 5) \text{ et } (n \leq 3)) \Leftrightarrow ((n > 4) \text{ et } (n < 4))$
La négation est : $\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5)$ et $(n \leq 3)$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$ est faux car pour $n = 5$, $(n \geq 5)$ est vrai et $(n > 6)$ est faux (idem pour $n = 6$).
Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \Leftrightarrow (n < 7) \Rightarrow (n < 5)$.
Sa négation est $(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n \leq 6)) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n < 7))$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$ est faux car pour $n = 7$, $(n \geq 5)$ est vrai et $(n \leq 6)$ est faux.
Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \Leftrightarrow (n < 7) \Rightarrow (n < 5)$.
Sa négation est $(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n > 6)) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n > 7))$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, (n > 7)$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Leftrightarrow (n = 0)$ si $(n < 1)$ est vrai alors $n = 0$ et comme $0 = 0 \times 2$, cela signifie que 2 divise 0, par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ divise } 2)$ est vrai. Il n'y a que cela à vérifier parce que si $n < 1$ est faux, quoiqu'il arrive à la conclusion, l'implication est vraie.
On aura pu aussi voir que : $(n \text{ divise } 2) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k)$
$\Leftrightarrow (n \text{ est pair})$
Sa contraposée est $(\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1)) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est impair}) \Rightarrow (n \geq 1)$.
Vu ainsi il est clair que la contraposée est vraie et que donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$ est vrai.

5. Comme dans le 4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Leftrightarrow (n = 0)$ mais 0 ne divise pas 2, sinon cela signifierait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 = k \times 0$ ce qui est faux par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$ est faux.
En effet une assertion vraie ne peut pas impliquer une assertion fausse.
La contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1)$. La négation est $(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2))$. Vérifions que cette implication est vraie : soit $n = 0$ et $(n < 1)$ est vrai et (0 ne divise pas 2) est vrai ce qui entraine que $(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2))$ est vrai.

6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n < 2) \Leftrightarrow (n \in \{0,1\})$, si $n = 0$ alors $n^2 = 0^2 = 0 = n$ et si $n = 1$ alors $n^2 = 1^2 = 1 = n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$.
La contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)$
Sa négation est $\exists n \in \mathbb{N}$, $(n < 2)$ et $(n^2 \neq n)$.

Exercice 2 :

Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?
1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $((n \geq 5)$ et $(n$ divise $12) \Leftrightarrow (n = 6)$

Correction exercice 2 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$ car un entier strictement supérieur à 4 est supérieur ou égal à 5.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$ est faux car pour $n = 4$, $(n \geq 4)$ est vrai et $(n \geq 5)$ est faux.

3. Les diviseurs entiers et positifs de 12 sont $\{1,2,3,4,6,12\}$ donc les diviseurs entiers et supérieurs ou égaux à 5 sont 6 et 12, bref, il suffit de dire que 12 rend vrai $((n \geq 5)$ et $(n$ divise $12)$ et faux $(n = 6)$ pour pouvoir affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $((n \geq 5)$ et $(n$ divise $12) \Leftrightarrow (n = 6)$ est faux.

Exercice 3 :

Soient les 4 assertions suivantes :
a. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y > 0$
b. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y > 0$
c. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y > 0$
d. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y\ 2 > x$
1. Les assertions a, b, c et d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation

Correction exercice 3 :

1. a. est faux car si un tel x existe, il suffit de prendre $y = -x - 1$ pour que $x + y > 0$ soit faux, en effet $x + (-x - 1) = -1 < 0$
   b. est vrai, car pour un x fixé, on choisit $y = -x + 1$ de façon à ce que $x + (-x + 1) = 1 > 0$.
   c. est faux car si on prend $x = y = -1$ alors $x + y = -2$ est faux et donc on n'a pas $x + y > 0$
   d. Il suffit de prendre $x = -1$, ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y\ 2 > -1$, l'assertion est vraie.

Exercice 4 :

Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.
a) … $x \in \mathbb{R}$, $(x + 1)\ 2 = x\ 2 + 2x + 1$
b) … $x \in \mathbb{R}$, $x\ 2 + 3x + 2 = 0$
c) … $x \in \mathbb{R}$, $2x + 1 = 0$
d) … $x \in \mathbb{R}$, $x\ 2 + 2x + 3 \neq 0$

Correction exercice 4 :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x + 1)\ 2 = x\ 2 + 2x + 1$
b) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x\ 2 + 3x + 2 = 0$

c) $\exists x \in \mathbb{R}$, $2x + 1 = 0$

d) $\exists x \in \mathbb{R}$, x 2 $+ 2x + 3 \neq 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, x 2 $+ 2x + 3 \neq 0$

Exercice 5 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu’elles sont fausses, énoncer leur négation.

a) $\exists x \in \mathbb{N}$, x 2 > 7

b) $\forall x \in \mathbb{N}$, x 2 > 7

c) $\forall x \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}$, $y > x$ 2

d) $\exists x \in \mathbb{N}$, $\forall\, y \in \mathbb{N}$, $y > x$ 2

Correction exercice 5 :

a) Vraie

b) Fausse par exemple pour $x = 1$, la négation est : $\exists x \in \mathbb{N}$, x 2 ≤ 7

c) Vraie

d) Fausse car la négation est manifestement vraie, la négation est : $\forall x \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}$, $y \geq x$ 2 .