Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ *par :* $f(0)=1$ *et* $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ *; pour tout* $x>0$ *, et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que f est continue à droite en 0.

2. a) Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$ *on a :* $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0=0$*, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

3. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $h(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)$

a) Etudier le sens de variation de h, puis en déduire le signe de h sur $[0;+\infty[$

b) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[);\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Représenter (C_f) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5. a) Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ *vers un intervalle J à déterminer*

b) Montrer que f^{-1} *est dérivable en 1 et calculer* $\left(f^{-1}\right)'(1)$

c) Représenter $\left(C_{f^{-1}}\right)$ *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 2:

I. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$

On considère la fonction h_n *définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :* $h_n(x)=n\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$

1. Etudier les variations de h_n.

2. En utilisant la valeur de $h_n(0)$*, déterminer le signe de* $h_n(x)$ *sur l'intervalle* $]-1;+\infty[$

II. *A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction* f_n *définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :*
$f_n(x)=x^n\ln(1+x)$ *; et soit* (C_n) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Etudier les branches infinies de (C_n).

2. a) Pour tout $x\in]-1;+\infty[$*, vérifier que :* $f_1'(x)=h_1(x)$ *et que* $\forall n>1$ *;* $f_n'(x)=x^{n-1}h_n(x)$

b) Dresser le tableau de variations de f_n.

3. Etudier la position relative de (C_{n+1}) *et* (C_n).

4. Représenter (C_1) *et* (C_2) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 3

I. *Soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $g(x)=2x^3-1+2\ln|x|$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2. a) Calculer $g'(x)$*, pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Dresser le tableau de variations de g.

3. Montres que l'équation $g(x)=0$ *admet une unique solution* $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

4. Etudier le signe de $g(x)$ *sur* $\mathbb{R}^*$.

II. *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x)=2x-\frac{\ln|x|}{x^2}$

Soit (C_f) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$*, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

2. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Etudier les branches infinies de (C_f)

c) Etudier la position relative de (C_f) *et la droite* (D) *d'équation* $y=2x$.

3.a) Calculer $f'(x)$*, pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Montrer que : $f(\alpha)=3\alpha-\frac{1}{2\alpha^2}$

d) Représenter (C_f) *(on prend* $\alpha\simeq 0{,}85$*)*

III. *Soit m un réel supérieur à* 1.

1. Montrer que la fonction H définie sur $[1;+\infty[$ *Par :* $H: x\mapsto -\frac{1+\ln x}{x}$ *est une primitive de la fonction h définie sur* $[1;+\infty[$ *Par :* $h: x\mapsto \frac{\ln x}{x^2}$

2. a) On désigne par $A(m)$ *l'intégrale :* $\int_1^m |f(x)-2x|dx$. *Calculer* $A(m)$

b) Déterminer $\lim_{m\to+\infty} A(m)$.