

**Exercice 1** (4 pts)

Dans Espace rapport à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère les points  $A(1; 2; 2)$ ,  $B(3; 4; 6)$ ,  $C(5; 6; 10)$  et  $A(1; 2; 2)$

1- Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de la sphère  $(S)$  de diamètre  $[AB]$

2- Soit  $(P)$  le plan passant par le point  $A$ , et perpendiculaire à la droite  $(AC)$

a- Montrer que  $x + y + 2z - 7 = 0$  est une équation cartésienne de  $(P)$

b- Montrer que le plan  $(P)$  est tangent à la sphère  $(S)$  en  $A$

3- Soit  $(R)$  le plan d'équation  $x + y - z - 4 = 0$

a- Montrer que la sphère  $(S)$  et le plan  $(R)$  se coupent suivant un cercle  $(C)$

b- Déterminer le centre  $a$  et le rayon de  $(C)$

4- On considère les vecteurs  $\vec{u}(1, 1, 2)$  et  $\vec{v}(1, 1, -1)$

Calculer  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , en déduire que les plans  $(P)$  et  $(R)$  se coupent suivant une droite  $(\Delta)$  dont on déterminera un vecteur directeur  $\vec{w}$ .

**Exercice 2** (4. 5 pts)

Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

1- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(B): Z^2 - Z + 1 = 0$

2- On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  affixes respectives,  $\frac{3}{2} + 6i$ ,  $\frac{3}{2} - 6i$  et  $3 + 2i$

a- Soit  $T$  la translation, de vecteur  $\vec{v}$  d'affixe  $-1 + \frac{5}{2}i$ .

Déterminer l'affixe du point  $E$ , image de  $B$  par  $T$

b- Le point  $F$  est l'image de  $D$  par l'homothétie  $h$  de centre  $C$  et de rapport  $-\frac{1}{3}$  déterminer  $Z_F$  l'affixe de  $F$ .

c- Le point  $G$  est l'image de  $D$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . Déterminer  $Z_G$  l'affixe de  $G$ .

3- Soit  $M, N$  et  $S$  les points d'affixes respectives  $\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$ ,  $-5 - i$  et  $-\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$ .

a- Montrer que le quadrilatère  $DMNS$  est un parallélogramme

b- Montrer que :  $\frac{Z_M - Z_D}{Z_S - Z_D} = i$ , en déduire que le quadrilatère  $DMNS$  est un carré

4- Soit  $P(Z) = Z^2 - Z + 1$ , pour tout  $Z$  de  $\mathbb{C}$

a- En posant  $Z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels, mettre  $P(Z)$  sous forme algébrique

b- Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  formé par les points  $M_{(Z)}$  tels que  $P(Z)$  soit un réel.

**Problème (11, 5 pts)**

**Partie 1**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} - 1$ .

Dans cette partie, on se propose de déterminer le signe de la fonction  $g$  par deux méthodes différentes

**Méthode 1 :**

1-Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ , et montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$

-Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = \frac{1}{2}(x+3)e^{\frac{x}{2}}$ , puis donner le tableau de variations de  $g$

(On prend  $g(-3) = -\frac{3}{2}$ ).

- Calculer  $g(0)$ , et en déduire que :  $(\forall x < 0) \quad g(x) < 0$  et  $(\forall x > 0) \quad g(x) > 0$

**Méthode 2 :**

1- Déterminer le signe de  $e^{\frac{x}{2}} - 1$

En déduire que :  $g(x) < 0$  et  $(\forall x > 0) \quad g(x) > 0$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x \left( e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$

$(C_f)$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (l'unité est 2 cm)

1- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \left( e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) g(x)$

b- Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , puis donner le tableau de variations de  $f$

3- a - Etudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$

b- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ , et donner une interprétation géométrique.

c- Etudier sur  $\mathbb{R}$ , le signe de  $x \left( e^{\frac{x}{2}} - 2 \right)$ , et en déduire la position de  $(C_f)$  par rapport à la droite

$(\Delta)$  d'équation :  $y = x$ .

d- Vérifier que l'origine  $O$  du repère est un point d'inflexion de  $(C_f)$ , puis Construire  $(C_f)$ .

**Partie 2**

On considère les intégrales  $I = \int_0^{\ln 4} \left( 4e^{\frac{x}{2}} - e^x \right) dx$  et  $J = \int_0^{\ln 4} x \left( 2e^{\frac{x}{2}} - e^x \right) dx$

1- Montrer que  $I = 5$ , puis établir à l'aide d'une intégration par parties que  $J = -5 + 4 \ln 4$

1- Déterminer en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $A$  du domaine du plan délimité par : la courbe  $(C_f)$ , la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x$ , l'axe  $(Oy)$ , et la droite d'équation  $x = \ln 4$ .

2- a) Résoudre l'équation différentielle  $(E) : y' - \frac{1}{2}y = 0$

b) Déterminer la fonction  $h$ , sachant que la fonction  $(h + g)$  est une solution de  $(E)$  et  $h(0) = 1$ .

**Partie 3**

On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $V_n = \left( \ln \left( \frac{3}{2} \right) \right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

Dans les questions a et b, il est interdit d'utiliser des valeurs approchées.

1- Montre que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < V_n < 1$

2- Montrer que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

3- On pose :  $U_n = f(V_n)$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < (\sqrt{e} - 1)^2$

Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

WWW.GUESSMATHS.CO