

GUESSMATHS

Revue n°2 :

Chapitre « Dérivabilité et étude de fonction »
2ème Bac SC. Expérimentales et Sc .Eco

ZONE PUBLICITAIRE

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1^{er} Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen
Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée
tout se transforme »
Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

Dérivabilité et étude de fonction

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com

whatsapp : 0604488896

I. Rappels

1) Fonction dérivable

Définition :

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ , tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell.$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a .

2) Tangente à une courbe

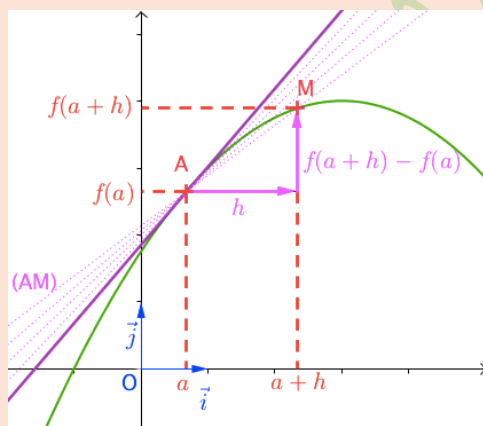
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

ℓ est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative (C_f) de f .

Définition :

La tangente à la courbe (C_f) au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé ℓ .



Propriété :

Une équation de la tangente à la courbe (C_f) en A est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - 1 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 7) = 7$$

Le coefficient directeur de la tangente est égal à 7.

Donc son équation est de la forme : $y = 7(x - 2) + f(2)$, soit : $y = 7(x - 2) + 9$

$$y = 7x - 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

3) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^6$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^5$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$.

4) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

ZONE PUBLICITAIRE

Exemples :

$$a) f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$$

$$\text{On pose } f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = 2x^2 - 5x \Rightarrow u'(x) = 4x - 5$$

$$v(x) = 3x - 2 \Rightarrow v'(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= (4x - 5) + 3(2x^2 - 5x)(3x - 2) \\ &= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x \\ &= 18x^2 - 38x + 10 \end{aligned}$$

$$b) g(x) = \frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$$

$$\text{On pose } g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \Rightarrow u'(x) = 6$$

$$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \Rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } g'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

5) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème :

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.

Réolvons l'inéquation $f'(x) \leq 0$

$$\begin{aligned} f'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow 2x - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 \end{aligned}$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

II. Dérivées de fonctions composées

1) Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété :

u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Exemple :

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$$

On pose $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x - 1 \Rightarrow u'(x) = 6x + 4$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{6x + 4}{2\sqrt{3x^2 + 4x - 1}} = \frac{3x + 2}{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}} \end{aligned}$$

2) Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$

Propriété :

n est un entier relatif non nul, u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I dans le cas où n est négatif.

Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = n u'(x) (u(x))^{n-1}.$$

Exemple :

$$f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$$

On pose $f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \Rightarrow u'(x) = 4x + 3$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= 4 u'(x) (u(x))^3 \\ &= 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3 \end{aligned}$$

ZONE PUBLICITAIRE

3) Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété :

a et b sont deux nombres réels. f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Alors la fonction g définie sur I par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur tout intervalle J tel que pour tout $x \in J$, $(ax+b) \in I$ et on a : $g'(x) = af'(ax+b)$.

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{1}{5x-4}$

Alors $f'(x) = (5x-4)' \times \frac{-1}{(5x-4)^2} = \frac{-5}{(5x-4)^2}$

En effet : $(5x-4)' = 5$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

4) Formules de dérivation sur les fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u(x)}$	$\sqrt{u(x)} > 0$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^* \mathbb{Z}$	$\sin < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
$f(ax+b)$	f dérivable	$af'(ax+b)$
$f \circ g(x)$	f et g sont dérivables respectivement sur leurs domaines de définition	$g'(x) \times f'(g(x))$

Méthode :

Etude d'une fonction composée

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C .
- 3) Etudier la dérivabilité de f .
- 4) Etudier les variations de f .

5) Tracer les asymptotes à C puis la courbe C.

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$ donc la fonction f est définie pour tout x vérifiant $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$.

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
2x	-	-	0	+
3x+1	-	0	+	+
$\frac{2x}{3x+1}$	+	-	0	+

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup [0; +\infty[$.

2) - Recherche des limites à l'infini :

La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.

Levons l'indétermination : $\frac{2}{3 + \frac{1}{x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}$

De plus, $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

On en déduit, comme limite de fonction composée, que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On démontre de même que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ainsi la droite d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Recherche de la limite de f à gauche en $-\frac{1}{3}$:

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^-} (3x+1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^-} 2x = -\frac{2}{3}$ donc $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^-} \frac{2x}{3x+1} = +\infty$.

En effet, pour $x < -\frac{1}{3}$ on a : $3x+1 < 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Donc, comme limite de fonction composée, on a : $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^-} f(x) = +\infty$.

Ainsi la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$ est asymptote verticale à la courbe C.

3) $\frac{2x}{3x+1}$ est strictement positive et dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]0; +\infty[$.

Comme dérivée de fonction composée, f est dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]0; +\infty[$.

Étudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{\frac{2h}{3h+1}} - 0}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2h}{3h+1}} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{\frac{1}{h^2} \times \frac{2h}{3h+1}} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{\frac{2}{3h^2 + h}} = +\infty\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

4) Pour tout réel x de $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]0; +\infty[$, on pose $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$.

$$\begin{aligned}u'(x) &= \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(3x+1)^2}\end{aligned}$$

ZONE PUBLICITAIRE

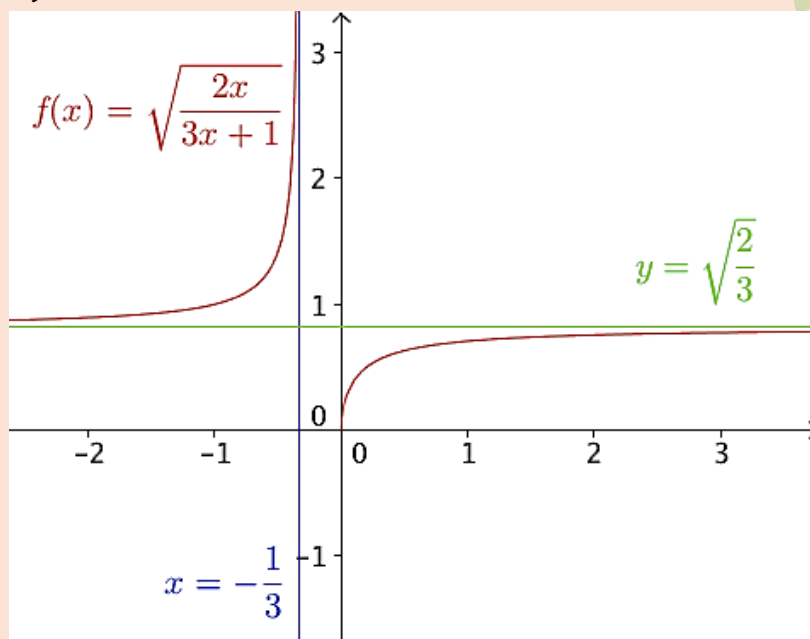
Donc : $f'(x) = \frac{2}{(3x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$ Et donc : $\left(\forall x \in \left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[\cup \left] 0; +\infty \right[\right) ; f'(x) > 0$

Par conséquent la fonction f est croissante sur $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[$ et sur $] 0; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations : $f(0) = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	///////// ////////		+
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\nearrow +\infty$	///////// ////////	$0 \nearrow \sqrt{\frac{2}{3}}$	

5)



5) Interprétation géométrique d'une dérivée

a) Dérivabilité en un point

On sait que la dérivée en un point x_0 notée $f'(x_0)$ est le nombre dérivé mais aussi c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

Donc :

- si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$; alors $f'(x_0) = l$ on interprète le résultat par :

« la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse x_0 de coefficient directeur $f'(x_0) = l$ ».

b) Dérivabilité à droite ou à gauche en un point

- si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$; alors on

interprète le résultat par :

« f est pas dérivable à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = l$ la courbe de f admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0) = l$ (respectivement f est pas dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = l$ la courbe de f admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse x_0 de coefficient directeur $f'_g(x_0) = l$ ».

- si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$; alors on interprète le résultat par :

« f n'est pas dérivable à droite en x_0 et la courbe de f admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse x_0 dirigée vers le haut si le résultat est $+\infty$ ou dirigée vers le bas si le résultat est $-\infty$ ».

- si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$; alors on interprète le résultat par :

« f n'est pas dérivable à gauche en x_0 et la courbe de f admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse x_0 dirigée vers le haut si le résultat est $-\infty$ ou dirigée vers le bas si le résultat est $+\infty$ ».

ZONE PUBLICITAIRE

Série d'exercices corrigés dérivabilité

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{1-x^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) a- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1 .

b- Interpréter géométriquement les résultats précédents.

Correction

$$\begin{aligned} 1) \quad D_f &= \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_f = [-1; 1]$$

$$2) \text{ a- et b- } \bullet \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + \sqrt{1-x^2} + 2}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} + 2(x+1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1+x})\sqrt{1+x}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} \nearrow \sqrt{2} \searrow 0^+ \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$$

Par suite f n'est pas dérivable à droite en -1 et C_f admet une demi-tangente

verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse -1

$$\bullet \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + \sqrt{1-x^2} - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} + 2(x-1)}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} \nearrow \sqrt{2} \searrow 0^+
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$$

Par suite f n'est pas dérivable à gauche en 1 et C_f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche du point d'abscisse 1.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} ; x \geq 0 \\ f(x) = 4\sqrt{1-x} + x - 4 ; x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

2) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$, puis donner une interprétation géométrique des résultats trouvés.

Correction

1) On a : $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} ; x \geq 0$; donc $f(0) = 0$

Et $f(x) = 4\sqrt{1-x} + x - 4 ; x < 0$; calculons $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 4\sqrt{1-x} + x - 4 = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Par suite f est continue en 0.

2) • Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{3}{x}\right)}}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3} \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = +\infty
\end{aligned}$$

Par suite f n'est pas dérivable à droite en 0 et C_f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse 0

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4\sqrt{1-x} + x - 4}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{4\sqrt{1-x} - 4}{x} + 1 \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{4(\sqrt{1-x} - 1)}{x} + 1 \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{4(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{x(\sqrt{1-x} + 1)} + 1 \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-4}{\sqrt{1-x} + 1} + 1 = -1
\end{aligned}$$

Par suite f est dérivable à gauche en 0 ; $f'_g(0) = -1$ et C_f admet une demi-tangente de coefficient directeur -1 à gauche du point d'abscisse 0

ZONE PUBLICITAIRE

EXERCICE 3

Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}$; $I =]0, +\infty[$

2) $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{4}}$; $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$; $I =]1, +\infty[$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$; $I =]1, +\infty[$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 1}$; $I =]1, +\infty[$

6) $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2 + 3}$; $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \sin^3(x^2 - x)$; $I = \mathbb{R}$

8) $f(x) = \frac{x}{x-1}(x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$; $I =]1, +\infty[$

Correction

1) $f(x) = (x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}$; $I =]0, +\infty[$

$f(x)$ est dérivable sur $I =]0, +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $I =]0, +\infty[$ est de la forme $u \times v$ où $u(x) = (x^2 - 5x + 1) \Rightarrow u'(x) = 2x - 5$ et

$$v(x) = \sqrt{x} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc $f'(x) = u' \times v + u \times v'$

$$\begin{aligned} &= (2x - 5) \times \sqrt{x} + (x^2 - 5x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} \times (2x - 5) \times \sqrt{x} + (x^2 - 5x + 1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2x - 5) \times x + (x^2 - 5x + 1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x^2 - 10x + x^2 - 5x + 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x^2 - 15x + 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = \frac{5x^2 - 15x + 1}{2\sqrt{x}}$; pour tout $x \in]0, +\infty[$

2) $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{4}}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est le composé de la fonction $x \mapsto (x^2 + x + 1)^3$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ où $x = x^2 + x + 1 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$; et elle est dérivable sur $I =]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $I =]0, +\infty[$.

On a : d'après la formule de la dérivée d'une fonction composée $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4} (x^2 + x + 1)' (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{4}-1} \\ &= \frac{3}{4} (2x + 1) (x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2x + 1}{\sqrt[4]{x^2 + x + 1}} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $f'(x) = \frac{3}{4} \times \frac{2x + 1}{\sqrt[4]{x^2 + x + 1}}$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$; $I =]1, +\infty[$

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x} + 1$ et $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ sont continues et dérivables sur $I =]1, +\infty[$; de plus $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ ne s'annule pas sur $I =]1, +\infty[$; donc f est dérivable sur $I =]1, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables et on a pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)' \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)' (\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1) (\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)^2} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]1, +\infty[) ; f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5} ; I =]1, +\infty[$

On a $x^2 + 4x - 5 > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ (en étudiant le signe de $x^2 + 4x - 5$)

Donc f est définie dérivable sur $I =]1, +\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $I =]1, +\infty[$ ($x \mapsto x^2 + 4x - 5$ et $x \mapsto \sqrt{x}$) et on a pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x^2 + 4x - 5} \right)' \\ &= \frac{(x^2 + 4x - 5)'}{2\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \\ &= \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \\ &= \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]1, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 1} ; I =]1, +\infty[$

On a $x^3 + 3x^2 - 1 > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ (en mettant $x^3 + 3x^2 - 1$ sous la forme :

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 1 &= x^3 - 1 + 3x^2 \\ &= (x - 1)(x^2 + 3x + 1) + 3x^2 \end{aligned}$$

ZONE PUBLICITAIRE

Donc f est définie dérivable sur $I =]1, +\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $I =]1, +\infty[$ ($x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$) et on a pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 1} \right)' \\ &= \left((x^3 + 3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \right)' \\ &= \frac{1}{3} \times (x^3 + 3x^2 - 1)' \times (x^3 + 3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{1}{3} \times (3x^2 + 6x) \times (x^3 + 3x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 - 1)^2}} \end{aligned}$$

Donc ($\forall x \in]1, +\infty[$) ; $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 - 1)^2}}$

6) $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2 + 3}$; $I = \mathbb{R}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est le composé de la fonction $x \mapsto x^4 + x^2 + 3$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ où $x = x^4 + x^2 + 3 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$; et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 3} \right)' \\ &= \left((x^4 + x^2 + 3)^{\frac{1}{4}} \right)' \\ &= \frac{1}{4} \times (x^4 + x^2 + 3)' \times (x^4 + x^2 + 3)^{\frac{1}{4}-1} \\ &= \frac{1}{4} \times (4x^3 + 2x) \times (x^4 + x^2 + 3)^{-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2x^3 + x}{\sqrt[4]{(x^4 + x^2 + 3)^3}} \end{aligned}$$

Donc ($\forall x \in \mathbb{R}$) ; $f'(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt[4]{(x^4 + x^2 + 3)^3}}$

7) $f(x) = \sin^3(x^2 - x)$; $I = \mathbb{R}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est le composé de la fonction $x \mapsto x^2 - x$ et la fonction $x \mapsto \sin^3 x$; et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\sin^3(x^2 - x))' \\
 &= 3(\sin(x^2 - x))' (\sin^{3-1}(x^2 - x)) \\
 &= 3(x^2 - x)' \times \cos(x^2 - x) (\sin^2(x^2 - x)) \\
 &= 3(2x - 1) \times \cos(x^2 - x) \sin^2(x^2 - x) \\
 &= \frac{3(2x - 1) \sin^2(2(x^2 - x))}{4}
 \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{3(2x - 1) \sin^2(2(x^2 - x))}{4}$

8) $f(x) = \frac{x}{x-1} (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} ; I =]1, +\infty[$

f est dérivable sur $I =]1, +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables ($x \mapsto \frac{x}{x-1}$ car

$x-1$ ne s'annule pas sur $I =]1, +\infty[$ et $x \mapsto (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$ car $x^2 + 3 > 0$ sur $I =]1, +\infty[$)

et on a pour tout $x \in]1, +\infty[: f'(x) = \left(\frac{x}{x-1} (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} \right)'$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{x}{x-1} \right)' (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x}{x-1} \right) \left((x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} \right)' \\
 &= \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x-1} \right) (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}-1} (x^2 + 3)' \\
 &= \frac{-\sqrt[3]{x^2 + 3}}{(x-1)^2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3)^2}} \left(\frac{2x^2}{x-1} \right) \\
 &= \frac{-3\sqrt[3]{x^2 + 3} + 2x^2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} (x-1)^2} \\
 &= \frac{-3(x^2 + 3) + 2x^3 - 2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} (x-1)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 5x^2 - 9}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} (x-1)^2}
 \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]1, +\infty[) ; f'(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - 9}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} (x-1)^2}$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ et donner une interprétation géométrique.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction

1) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Or pour tout $x \neq 0$; on a : $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

D'où par encadrement on déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Par suite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$; donc f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$; la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

2) la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$; donc f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$; de plus f est dérivable en $x = 0$; par suite f est

$$\begin{aligned} \text{dérivable sur } \mathbb{R} ; \text{ et on a : } f'(x) &= \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \times \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-1}{x^2} \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$D'où \begin{cases} f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; si \ x \neq 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

- 1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Donner le tableau de variation de f .

Correction

$$\begin{aligned} 1) \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} ; \text{ on a : } f'(x) &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)' \\ &= 3x^2 - 6x + 3 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ &= 3(x-1)^2 \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 2) Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{10-x}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que : $(\forall x \in]0;10[) ; f'(x) = \frac{\sqrt[4]{(10-x)^3} - \sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$
- 3) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4) En déduire une comparaison des nombres $A = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}$ et $B = \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{7}$.

ZONE PUBLICITAIRE

Correction

$$\begin{aligned} 1) D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } 10-x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x \leq 10\} \end{aligned}$$

$$= [0; 10]$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Pour tout } x \in]0; 10[; f'(x) &= \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{10-x} \right)' \\
 &= \left(x^{\frac{1}{4}} + (10-x)^{\frac{1}{4}} \right)' \\
 &= \frac{1}{4} \times x^{\frac{1}{4}-1} + \frac{1}{4} \times (10-x)' \times (10-x)^{\frac{1}{4}-1} \\
 &= \frac{1}{4} \times x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} \times (10-x)^{-\frac{3}{4}} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(10-x)^3}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{(10-x)^3} - \sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{x^3}\sqrt[4]{(10-x)^3}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{(10-x)^3} - \sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]0; 10[) ; f'(x) = \frac{\sqrt[4]{(10-x)^3} - \sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$$

3) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt[4]{(10-x)^3} - \sqrt[4]{x^3}$; on a :

$$\begin{aligned}
 \bullet \sqrt[4]{(10-x)^3} - \sqrt[4]{x^3} &\geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{(10-x)^3} \geq \sqrt[4]{x^3} \\
 &\Rightarrow (10-x)^{\frac{3}{4}} \geq x^{\frac{3}{4}} \\
 &\Rightarrow 10-x \geq x \\
 &\Rightarrow 2x \leq 10 \\
 &\Rightarrow x \leq 5
 \end{aligned}$$

D'où $f'(x) \geq 0$; sur $]0; 5]$

ZONE PUBLICITAIRE

$$\begin{aligned}
 \bullet \sqrt[4]{(10-x)^3} - \sqrt[4]{x^3} &\leq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{(10-x)^3} \leq \sqrt[4]{x^3} \\
 &\Rightarrow (10-x)^{\frac{3}{4}} \leq x^{\frac{3}{4}} \\
 &\Rightarrow 10-x \leq x \\
 &\Rightarrow 2x \geq 10 \\
 &\Rightarrow x \geq 5
 \end{aligned}$$

D'où $f'(x) \geq 0$; sur $[5; 10[$

4) on a : $2 \in]0; 5]$ et $3 \in]0; 5]$; de plus f est croissante sur $]0; 5]$; alors

$$2 \leq 3 \Rightarrow f(2) \leq f(3)$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{10-2} \leq \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10-3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8} \leq \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{7}$$

Axe de symétrie – Centre de symétrie Point d'inflexion

⊙ Axe de symétrie

La droite d'équation $y = a$ est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction f si et seulement si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f$ alors $(2a - x) \in \mathcal{D}_f$
- $\forall x \in \mathcal{D}_f$ $f(2a - x) = f(x)$

⊙ Centre de symétrie

Le point $I(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe d'une fonction f si et seulement si :

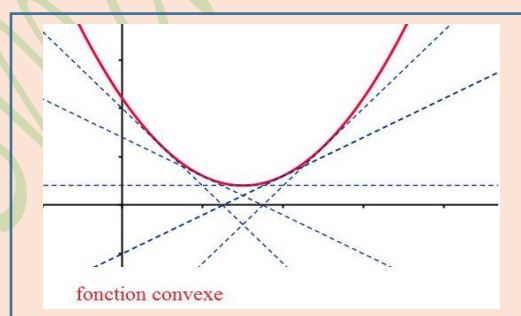
- $\forall x \in \mathcal{D}_f$ alors $(2a - x) \in \mathcal{D}_f$
- $\forall x \in \mathcal{D}_f$ $f(2a - x) + f(x) = b$

⊙ Convexité et concavité – point d'inflexion

Une courbe de fonction est convexe sur un intervalle I si elle est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle

Si on a : $f''(x) \geq 0 \quad (\forall x \in I)$

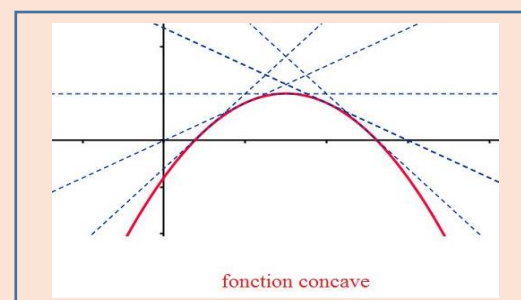
Alors la courbe de f est convexe sur I



Une courbe de fonction est concave sur un intervalle I si elle est au-dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle

Si on a : $f''(x) \leq 0 \quad (\forall x \in I)$

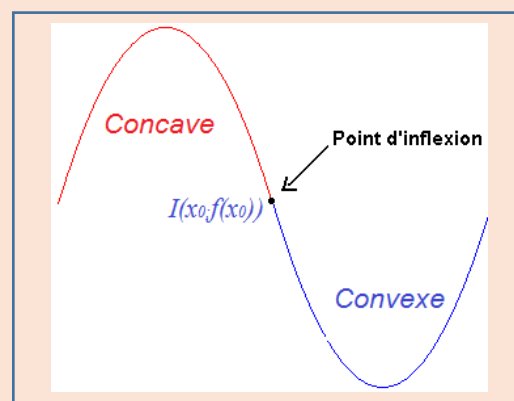
Alors la courbe de f est concave sur I



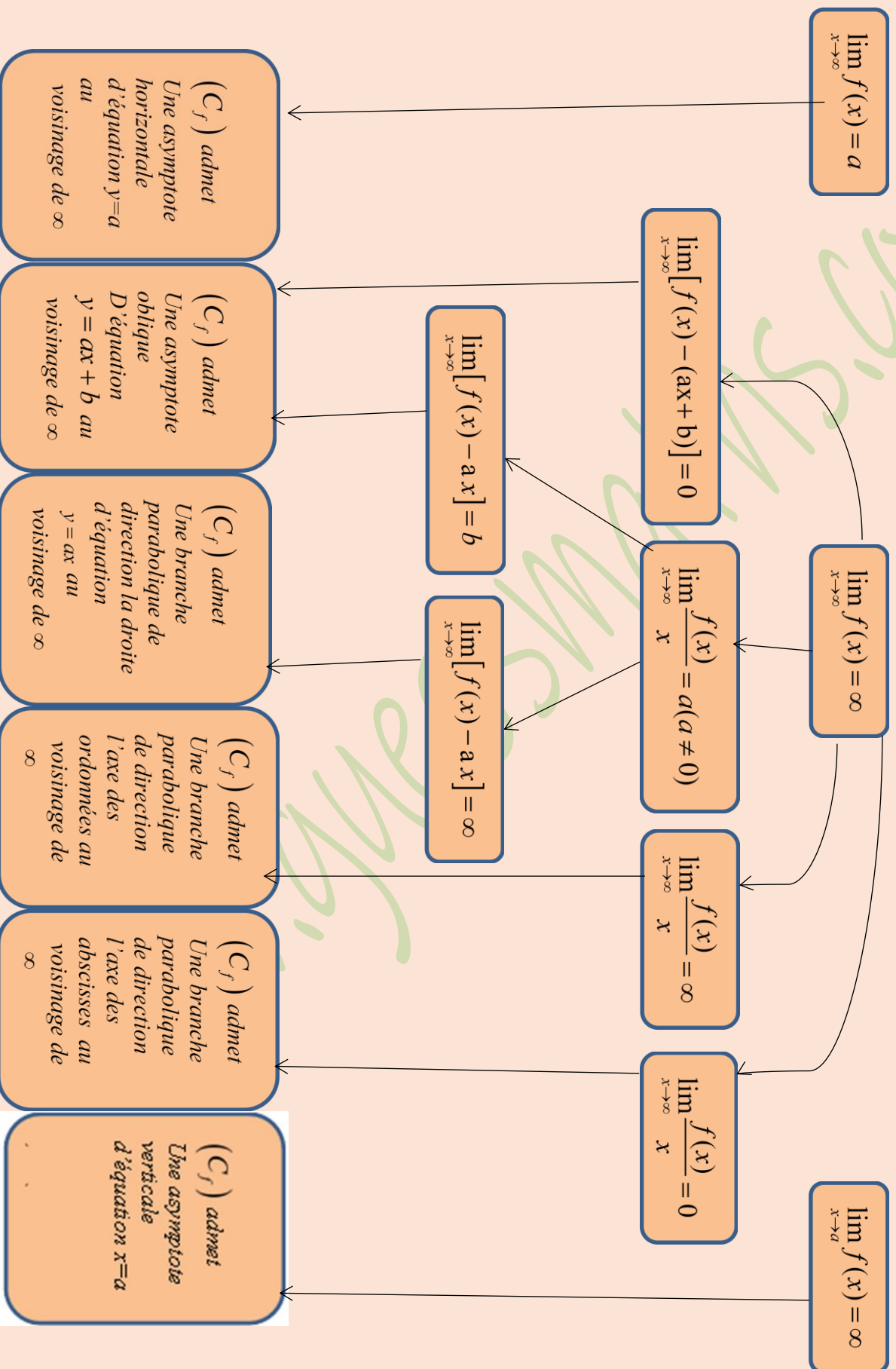
Un point $I(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion si la courbe change de concavité en ce point

Si f'' s'annule au point x_0 en changeant de signe alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0 .

Si f' s'annule au point x_0 sans changer de signe alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0 .



BRANCHES INFINIES ET INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES



La fonction réciproque

■ Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = f(I)$
Cette fonction est notée : $f^{-1} : x \mapsto f^{-1}(x)$

■ Résultats

$$\circ \begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J = f(I) \end{cases}$$

$$\circ \forall x \in I \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\circ \forall y \in f(I) \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

■ Déterminer l'expression de la fonction inverse

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I

En utilisant l'équivalence : $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$; en cherchons y en fonction de x ; on déduit l'expression de f^{-1} pour tout x de $f(I)$

■ Continuité de la fonction réciproque

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$

■ Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I ; donc elle admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = f(I)$; et on a :

$$(\forall x \in J) ; f \circ f^{-1}(x) = x$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in J) ; (f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$$

Donc si $(\forall x \in J) ; f'(f^{-1}(x)) \neq 0$; alors f^{-1} est dérivable sur J et $(\forall x \in J) ;$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

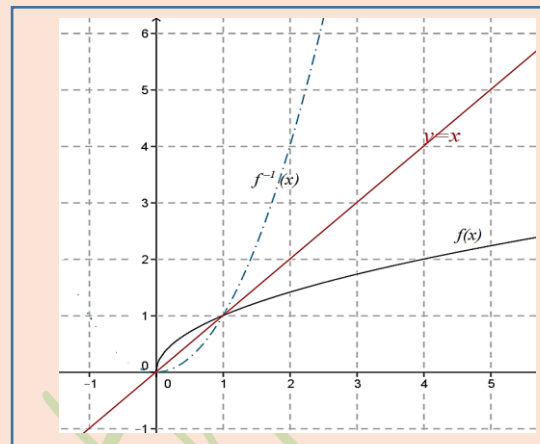
Et si en $x_0 \in J ; f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$; alors f^{-1} est dérivable en x_0 et $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

■ Dérivabilité de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} a le même sens de variation sur $f(I)$ que f

■ Représentation graphique de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; les courbes de la fonction f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice.



Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^2$

On sait que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Et $f'(x) = 2x$ donc $f'(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$

Alors $f'(\sqrt{x}) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$

Par suite f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Et on retrouve la formule de dérivation pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+} : (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ZONE PUBLICITAIRE

Fonction racine nième $n \in \mathbb{N}$

■ Propriétés et définition

La fonction : $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ admet une fonction réciproque qu'on appelle fonction racine nième ; on la note : $\sqrt[n]{x}$

$$\sqrt[n]{x} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

■ Cas particuliers

- ° $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$
- ° le nombre $\sqrt[3]{x}$ s'appelle la racine cubique de x .

■ Propriétés

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (n; m) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$$

■ Egalités importantes

$$\left\langle \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}} \quad \left| \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right. \right\rangle$$

ZONE PUBLICITAIRE

■ Domaine de définition

f définie comme suit	Domaine de définition de f
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$	$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

■ Les limites

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$l \geq 0$	$\sqrt[n]{l}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$

Ces limites restent valables en x_0 à droite ou à gauche et en $\pm\infty$

■ Continuité

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I

Si u est positive et continue sur l'intervalle I Alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I .

■ Dérivabilité

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I

Si u est positive et dérivable sur l'intervalle I Alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I .

$$\text{et on a : } \forall x \in]0; +\infty[\quad (\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{(u(x))'}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$$

■ Résolution de l'équation $[x^n = a \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ et } (a \in \mathbb{R})]$

n est impair	n est pair
----------------	--------------

$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-\sqrt[n]{ a }\}$	$S = \emptyset$

■ Puissance rationnelles d'un réel positif

Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul tel que : $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

■ Remarques importantes

- $\forall x \in]0; +\infty[\quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- Le domaine de définition de la fonction : $x \mapsto (u(x))^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$) est :
 $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

$$\bullet \left(\sqrt[n]{u(x)} \right)' = n \times (u(x))' \times (u(x))^{\frac{1}{n}-1}$$

Pour tous x et y de $\mathbb{R}_+^*$ et r ; r' de $\mathbb{Q}^*$

$$\bullet (x^r)^{r'} = x^{r \times r'} \quad \bullet x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad \bullet (x \times y)^r = x^r \times y^r$$

$$\bullet \left(\frac{x}{y} \right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad \bullet \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad \bullet \frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'}$$

4. comment interpréter graphiquement une limite

Méthode

On l'interprète en termes d'asymptote

■ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$, alors on conclut que : C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

■ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, ou $b \in \mathbb{R}$, alors on conclut que : C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ au voisinage de $\mp\infty$.

■ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = 0$ avec $y = ax + b$, alors C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\mp\infty$.

Exemple

Calculer les limites suivantes et donnez-en une interprétation graphique:

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+5-x^2}{2+x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + (4x+1)$ où $f(x) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2}$.

Solution

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessoumaa@gmail.com

whatsapp : 0604488896

a) Pour $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+5-x^2}{2+x}$

On a $\lim_{x \rightarrow -2^-} x+5-x^2 = -1$ (car le polynôme $x+5-x^2$ est continue en -2).

Et $\lim_{x \rightarrow -2^-} 2+x = 0^-$ (car $x < -2$).

Donc en appliquant les règles de quotient des limites ; on obtient : $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+5-x^2}{2+x} = +\infty$

Interprétation géométrique :

C_f admet $-\infty$ la droite d'équation $x = -2$ comme asymptote verticale.

b) Pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2}$

En utilise la règle du plus haut degré ; on obtient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{-x^2} = 4$

Interprétation géométrique :

C_f admet au voisinage de $-\infty$ la droite d'équation $y = 4$ comme asymptote horizontale.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + (4x+1)$ où $f(x) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2}$.

pour calculer cette limite il suffit de trouver une expression simplifier de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + (4x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4x^2+9x+5}{x+2} + (4x+1)$$

On peut d'abord montrer que : $f(x) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2} = -(4x+1) - \frac{3}{x+2}$ par une division euclidienne de $4x^2+9x+5$ par $x+2$; on obtient :

$$f(x) + (4x+1) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2} = (4x+1) - (4x+1) - \frac{3}{x+2} = -\frac{3}{x+2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x+2} = 0$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + (4x+1) = 0$.

Interprétation géométrique :

C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = -(4x+1)$ au voisinage de $+\infty$.

5. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote verticale

Méthode

On choisit une valeur interdite $a \in \mathbb{R}$ de f (càd une valeur où f n'est pas définie) et on calcule $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pour trouver $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans la plus part des cas cette limite se calculera à droite et à gauche de a .
On conclut que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .

Exemple

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{4 - x}$

Montrer que f admet une asymptote verticale dont on précisera une équation.

Solution

Comme 4 annule le dénominateur de $f(x)$, on n'hésite pas : on calcule $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x - 6 = 14$ et $\lim_{x \rightarrow 4} 4 - x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \pm\infty$ (selon si cette limite est à droite ou à gauche de 4).

Interprétation géométrique :

Des deux derniers résultats, on déduit que la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

ZONE PUBLICITAIRE

6. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote horizontale

Méthode

On calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ pour trouver un réel b .

On conclut alors que la droite équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$ ou au voisinage de $+\infty$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto \frac{2 + x - x^2}{3x^2 + 7}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que C_f la courbe représentative de f , admet en $-\infty$ une asymptote dont on précisera une équation.

Solution

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com

whatsapp : 0604488896

En utilise la règle du plus haut degré ; on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x-x^2}{3x^2+7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

On peut donc conclure que C_f admet une asymptote verticale en $-\infty$ d'équation $y = -\frac{1}{3}$

7. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote oblique

Méthode 2 (on nous demande d'étudier les branches infinies de la courbe de f aux voisinage de $\pm\infty$)

On trouve $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$.

On calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$; on a trois cas possibles :

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses aux voisinage de $\pm\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$; alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées aux voisinage de $\pm\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$; alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax$; on a deux cas possibles :
 - $\sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$; alors (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ aux voisinage de $\pm\infty$)
 - $\sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$; alors (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ aux voisinage de $\pm\infty$.

Méthode 2 (on nous donne une droite et on nous demande de montrer que cette droite est une asymptote à la courbe de f aux voisinage de $\pm\infty$)

On trouve $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$.

On montre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$ avec $y = ax + b$

On conclut alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x - 1}$

a) Déterminer les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.

b) En déduire que la courbe représentative C_f de f admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Solution

$$\begin{aligned} \text{a) Pour tout } x \neq 1, \text{ on a : } ax + b + \frac{c}{x - 1} &= \frac{ax(x - 1) + b(x - 1) + c}{x - 1} \\ &= \frac{ax^2 + (b - a)x + (c - b)}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{En identifiant les deux expressions on obtient : } \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -6 \\ c - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(x) = 2x - 4 + \frac{1}{x - 1} ; \text{ d'où : } f(x) - (2x - 4) = \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{Et comme } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 ; \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (2x - 4) = 0$$

On conclut que C_f admet la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 4$ comme asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.

8. Comment étudier sur l'intervalle I la position relative de C_f et d'une droite D qui lui est asymptote

Méthode

On calcule $f(x) - y$; où $y = ax + b$ est une équation de la droite D .

On étudie ensuite le signe de $f(x) - y$ sur Intervalle I (à l'aide d'un tableau de signe)

On conclut que C_f est au-dessus de D sur Intervalle I si $f(x) - y \geq 0$ et que (C_f) est au-dessous de D sur l'intervalle I si $f(x) - y \leq 0$

Exemple

Dans l'exemple précédent, étudier les positions relatives de (C_f) et de la droite D d'équation $y = 2x - 4$

Solution

On a montré que pour $x \neq 1$, $f(x) - (2x - 4) = \frac{1}{x-1}$

Etudions le signe de $f(x) - y$ avec $x \neq 1$: $f(x) - y$ est du signe de $x - 1$

Or $x - 1 > 0$ pour $x > 1$ et $x - 1 < 0$ pour $x < 1$

On peut donc dire que :

sur $]1; +\infty[$; $f(x) - y > 0$

Ce qui signifie que sur l'intervalle $]1; +\infty[$; (C_f) est au-dessus de D .

Et sur $]-\infty; 1[$; $f(x) - y < 0$

Ce qui signifie que sur l'intervalle $]-\infty; 1[$; (C_f) est au-dessous de D .

ZONE PUBLICITAIRE

Série d'exercices corrigés étude de fonction

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessoumaa@gmail.com

whatsapp : 0604488896

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

1. a) Etudier la monotonie de la fonction f

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ (Remarquez que 1 est une solution évidente)

2- Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty; 1]$ par : $g(x) = \sqrt{1-x}$

a) Etudier la monotonie de g sur $]-\infty; 1]$

b) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

3- Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = f \circ g(x)$

a) définir D_h l'ensemble de définition de h puis expliciter $h(x)$

b) Dresser le tableau des variations de h

Correction Exercice 1

1. a) pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$= 2x^2 + x^2 + 2x + 1$$

$$= 2x^2 + (x+1)^2$$

Et comme $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2x^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 > 0$

Alors $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$; la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$; on peut remarquer que 1 est une solution évidente ; donc le polynôme $x^3 + x^2 + x - 3$ est divisible par $(x-1)$

En effectuant une division euclidienne de $x^3 + x^2 + x - 3$ par $(x-1)$; on obtient

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$$

$$= (x-1)(x^2 + 2x + 1 + 2)$$

$$= (x-1)((x+1)^2 + 2)$$

$$\text{Donc } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)((x+1)^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ou} \quad (x+1)^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ou} \quad (x+1)^2 + 2 = 0$$

Comme $(x+1)^2 + 2 > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$; alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 = 1$

2ème méthode

On peut remarquer que : $x^3 + x^2 + x - 3 = x^3 - 1 + x^2 - 1 + x - 1$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1)(x+1) + (x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1 + x + 1 + 1)$$

$$= (x-1)(x^2 + 2x + 1 + 2)$$

$$= (x-1)((x+1)^2 + 2)$$

$$2 - g(x) = \sqrt{1-x} ; \text{ pour tout } x \in]-\infty; 1]$$

$$\begin{aligned} \text{a) Soit } x \in]-\infty; 1] ; \text{ on a : } g'(x) &= (\sqrt{1-x})' \\ &= \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

D'où $(\forall x \in]-\infty; 1]) ; g'(x) < 0$

Donc g est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{b) Pour tout } x \in]-\infty; 1] ; \text{ on a : } f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 3 = \sqrt{1-x} \\ &\Leftrightarrow -(1-x)((x+1)^2 + 2) = \sqrt{1-x} \\ &\Leftrightarrow -(\sqrt{1-x})^2((x+1)^2 + 2) - \sqrt{1-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{1-x}((\sqrt{1-x})((x+1)^2 + 2) + 1) = 0 \end{aligned}$$

Donc $x_0 = 1$ est solution de l'équation $f(x) = g(x)$

$$\text{Alors si } x \neq 1 ; \text{ on a : } f(x) = g(x) \Leftrightarrow (\sqrt{1-x})((x+1)^2 + 2) + 1 = 0$$

$$\text{Et comme } (\sqrt{1-x})((x+1)^2 + 2) + 1 > 0$$

Donc la seule solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est $x_0 = 1$.

3- Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = f \circ g(x)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathcal{D}_h &= \{x \in \mathcal{D}_g / g(x) \in \mathcal{D}_f\} \\ &= \{x \in]-\infty; 1] / g(x) \in \mathbb{R}\} \\ &=]-\infty; 1] \end{aligned}$$

b) On sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que g est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$; donc par propriété de la monotonie d'une fonction composée on déduit que h est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$; d'où le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	1
$h'(x)$	-	
$h(x)$		

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^3$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$
2. Etudier la dérivabilité de f à droite en -1
3. Etudier la monotonie de f sur $\mathcal{D}_f$
4. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

ZONE PUBLICITAIRE

Correction Exercice 2

$$f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^3$$

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_f = [-1; +\infty[$$

2. Etudions la dérivabilité de f à droite en -1

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$f(-1) = (\sqrt{-1+1} - 1)^3 = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Donc pour } x \neq -1 ; \text{ on a : } \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \frac{(\sqrt{x+1} - 1)^3 + 1}{x + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1} - 1 + 1)(x + 1 - \sqrt{x+1} + 1)}{x + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}(x - \sqrt{x+1} + 2)}{x+1}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1}}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - \sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1}} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -1

3. Pour tout $x \in]-1; +\infty[$; on a : $f'(x) = \left((\sqrt{x+1} - 1)^3 \right)'$

$$= 3(\sqrt{x+1} - 1)' (\sqrt{x+1} - 1)^{3-1}$$

$$= 3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} (\sqrt{x+1} - 1)^2$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{(\sqrt{x+1} - 1)^2}{\sqrt{x+1}}$$

Et comme $(\forall x \in]-1; +\infty[) ; (\sqrt{x+1} - 1)^2 \geq 0$ et $(\sqrt{x+1} - 1)^2 \geq 0$

Alors $(\forall x \in]-1; +\infty[) ; f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante sur $[-1; +\infty[$

4. a) $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$

D'où g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$; par suite elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle $J = f([0; +\infty[)$

$$= \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$= \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

- $f(0) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - 1)^3$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)} \right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1}{(\sqrt{x+1} + 1)} \right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)} \right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)} \right)^3 \quad \text{on pose } t = \sqrt{x+1} \text{ quand } x \rightarrow +\infty \text{ alors } t \rightarrow +\infty$$

$$\text{Et } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)} \right)^3 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2 - 1}{(t+1)} \right)^3$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t)^3 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Et } J = [0; +\infty[$$

$$b) \text{ Pour tout } x \in J ; \text{ on a : } y = g^{-1}(x) \Rightarrow x = g(y)$$

$$\Rightarrow x = (\sqrt{y+1}-1)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt{y+1}-1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} + 1 = \sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{x} + 1)^2 = y + 1$$

$$\Rightarrow y = (\sqrt[3]{x} + 1)^2 - 1$$

$$\text{D'où } g^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)^2 - 1 ; \text{ pour tout } x \in J$$

Exercice 3

Etudier la continuité en x_0 de chacune des fonctions suivantes :

$$1. \begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$2. \begin{cases} f(x) = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad x_0 = 2$$

Correction Exercice 3

$$1. \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$ en remplaçant x par 0 on obtient une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq 0 \text{ on a : } \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} &= \frac{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}{x(1 + \sqrt{1-x})} \\ &= \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} \\ &= \frac{1}{(1 + \sqrt{1-x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$; par suite f est continue en $x_0 = 0$.

$$2. \begin{cases} f(x) = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4} \text{ en remplaçant } x \text{ par } 0 \text{ on obtient une forme indéterminée } \frac{0}{0} //$$

ZONE PUBLICITAIRE

Pour $x \neq 2$ on a : $\frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4} = \frac{|x-2||x-1|}{(x-2)(x+2)}$

Donc • si $x > 2$; $\frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$

$$= \frac{x-1}{x+2}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$; par suite f est continue à droite en $x_0 = 2$.

• si $x < 2$; $\frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4} = \frac{-(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$

$$= \frac{-x+1}{x+2}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+1}{x+2} = -\frac{1}{4}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$; par suite f n'est pas continue à gauche en $x_0 = 2$.

Exercice 4

Etudier la continuité en x_0 de chacune des fonctions suivantes :

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad x_0 = 1$

2. $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ f(2) = \frac{3}{4} \\ f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-2} & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

ZONE PUBLICITAIRE

Correction Exercise 4

$$1. \begin{cases} f(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad x_0 = 1$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-x^2}$; on a une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq 1 \text{ on a : } \frac{x\sqrt{x}-1}{x-x^2} &= \frac{(x\sqrt{x}-1)(x\sqrt{x}+1)}{(x-x^2)(x\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(x\sqrt{x})^2-1}{(x-x^2)(x\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x^3-1}{x(1-x)(x\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(1-x)(x\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{-(x^2+x+1)}{x(x\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2+x+1)}{x(x\sqrt{x}+1)} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$; par suite f est continue en 1.

$$2. \begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ f(2) = \frac{3}{4} \\ f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Il s'agit d'étudier la continuité de f à droite puis à gauche de 2 car f est définie par deux expressions différentes sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-2}; \text{ on a une forme indéterminée du type "}\frac{0}{0}\text{"}$$

On posant $h(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; on a $h(2) = \sin(\pi) = 0$; donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x) - h(2)}{x-2}; \text{ et comme } h \text{ est dérivable en } 2 \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x) - h(2)}{x-2} &= h'(2); \text{ et } h'(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)' \\ &= \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } h'(2) = -\frac{\pi}{2}$$

Par suite $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$; donc f n'est pas continue à gauche en 2.

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2}; \text{ on a une forme indéterminée du type "}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq 2 \text{ on a : } \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2} &= \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \frac{(x^2 - (x+2))}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \frac{(x^2 - x - 2)}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}} = \frac{3}{4}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$; par suite f est continue à droite en 2.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x-1}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$
2. Calculer les limites de f Aux bornes de $\mathcal{D}_f$
3. Calculer $f'(x)$; pour tout $x \in \mathcal{D}_f$
4. Dresser le tableau de variations de f
5. Donner les Images des intervalles Suivants : $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$; $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $\left]1; \frac{3}{2}\right]$
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

Correction Exercice 5

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} \\ &=]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\end{aligned}$$

$$\sim f(0) = 4 \times 0 + 1 + \frac{1}{0-1} = 0$$

$$\sim f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = 1$$

$$\sim f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \times \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 9$$

ZONE PUBLICITAIRE

$$2. \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x + 1 + \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x + 1 + \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \text{)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x + 1 + \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x + 1 + \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{)}$$

3. Calculons $f'(x)$; pour tout $x \in \mathcal{D}_f$; f est dérivable sur son domaine de définition comme somme et quotient de fonctions dérivables; et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x + 1 + \frac{1}{x-1} \right)' \\ &= 4 - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{4(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2(x-1))^2 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2(x-1)-1)(2(x-1)+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-3)(2x-1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{(2x-3)(2x-1)}{(x-1)^2} ; \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}_f.$$

3. le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-3)(2x-1)$ sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Tableau de signe de $(2x-3)(2x-1)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+	+
$2x-3$	-	-	0	+
$(2x-3)(2x-1)$	+	0	-	+

$$\text{D'où : } \bullet f'(x) \geq 0 \text{ sur } \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \text{ et sur } \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

$$\bullet f'(x) \geq 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right]$$

4. Tableau de variations de f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	a	$+\infty$

5. • Comme f est continue strictement croissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et

$$]-\infty; \frac{1}{2}[\subset]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[; \text{ donc : } f\left(]-\infty; \frac{1}{2}[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ =]-\infty; 1]$$

$$\text{Donc } f\left(]-\infty; \frac{1}{2}[\right) =]-\infty; 1]$$

• Comme f est continue strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $\left[0; \frac{1}{2}\right] \subset]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[;$

$$\text{donc : } f\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f(0); f\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ = [0; 1]$$

$$\text{Donc } f\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) = [0; 1]$$

• Comme f est continue strictement décroissante sur $\left]1; \frac{3}{2}\right]$ et $\left]1; \frac{3}{2}\right] \subset]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$$\text{donc : } f\left(\left]1; \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)\right] \\ = [a; +\infty[$$

$$\text{Donc } f\left(\left]1; \frac{3}{2}\right]\right) = [a; +\infty[$$

6. f est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ et

$$f\left(\left]\frac{1}{2}; 1\right[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); f\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ =]-\infty; 1[$$

De plus $0 \in]-\infty; 1[$

Donc d'après le TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle

$$\left] \frac{1}{2}; 1 \right[.$$

Exercice 6

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) a) Montrer que la fonction est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

b) Dédurre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1; 0[$

2) En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,25

Montrer que : $\alpha = -\sqrt[3]{\alpha^2 - 3\alpha - 1}$

Correction Exercice 6

$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$; pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. a) g est un polynôme de degré 3 donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; et pour

$$\begin{aligned} \text{tout } x \in \mathbb{R} ; \text{ on a : } g'(x) &= (x^3 - x^2 + 3x + 1)' \\ &= 3x^2 - 2x + 3 \\ &= 3 \left(x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \right) \\ &= 3 \left(x^2 - 2 \times \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \frac{8}{9} \right) \\ &= 3 \left(\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{8}{9} \right) \\ &= 3 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) > 0$

D'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

ZONE PUBLICITAIRE

b) g est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $]-1; 0[$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com

whatsapp : 0604488896

$$\text{et } g([-1;0]) = [g(-1);g(0)] \quad (g(-1) = -4 ; g(0) = 1) \\ = [-4;1]$$

Et $0 \in [-4;1]$ ou $g(-1) \times g(0) < 0$; donc d'après le TVI l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1;0[$

2) Calculons l'image de $-\frac{1}{2}$ milieu de l'intervalle $]-1;0[$; on a :

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{7}{8}$$

D'où $g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$; $g(0) > 0$; alors $\alpha \in \left]-\frac{1}{2};0\right[$ et comme l'amplitude de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ est 0,5 alors on refait la même opération pour réduire l'amplitude de l'encadrement de α .

Calculons l'image de $-\frac{1}{4}$ milieu de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};0\right[$; on a :

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{11}{64}$$

D'où $g\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$; $g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$; alors $\alpha \in \left]-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right[$ et l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right[$ est d'amplitude 0,25 ; par suite on a obtenue l'encadrement de α voulu.

$$\text{On a : } g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = \alpha^2 - 3\alpha - 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \sqrt[3]{\alpha^2 - 3\alpha - 1} \quad \text{et comme } \alpha < 0$$

$$\text{Alors } \alpha = -\sqrt[3]{\alpha^2 - 3\alpha - 1}$$

ZONE PUBLICITAIRE

Problème 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de f .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) Etudier la continuité de f sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.
- 4) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 ; puis interpréter géométriquement le résultat.
- 5) Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$.
- 6) Montrer que : $\forall x > -1 ; f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$
- 7) Dresser le tableau de variation de f
- 8) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour tout $x \geq -1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 9) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Correction Problème 1

$$f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$$

$$\begin{aligned} 1) D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} \\ &= [-1; +\infty[\end{aligned}$$

$$2) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x+1})$; en remplaçant x par $+\infty$ on obtient une forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$; alors enlevons l'indétermination ; pour $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{x+1} &= \left(x - 2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} \right) \\ &= \left(x - 2x\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \quad (\sqrt{x^2} = x \text{ quand } x > 0) \\ &= x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

3) la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur son domaine de définition qui est $[-1; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-1; +\infty[$; par suite la fonction f est continue sur $[-1; +\infty[$ en tant que somme et produit de deux fonctions continues.

4) Calculons $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x - 2\sqrt{x+1}) - (-1 - 2\sqrt{-1+1})}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 2\sqrt{x+1} + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1) - 2\sqrt{x+1}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = -\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty) \end{aligned}$$

On conclut que f n'est pas dérivable à droite en -1 et que (C_f) admet une demi-tangente au point d'abscisse -1 dirigée vers le bas.

5) on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\sqrt{x+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2\sqrt{x+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} \text{ et } = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x+1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\sqrt{x+1} = -\infty \end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$; on conclut que (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

6) Pour tout $x > -1$; on a : $f'(x) = (x - 2\sqrt{x+1})'$

$$= 1 - \frac{2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \frac{(x+1-1)}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}
\end{aligned}$$

D'où $\forall x > -1 ; f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$

7) On a $f'(x)$ est du même signe que x d'où :

Tableau de variation de f sur $[-1; +\infty[$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-1	-2	$+\infty$

8) on a pour $x \geq -1 : f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x+1} = 0$

$$\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+1=2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1 = \pm\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-1 = -\sqrt{2} \\ \sqrt{x+1}-1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{x+1} = 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

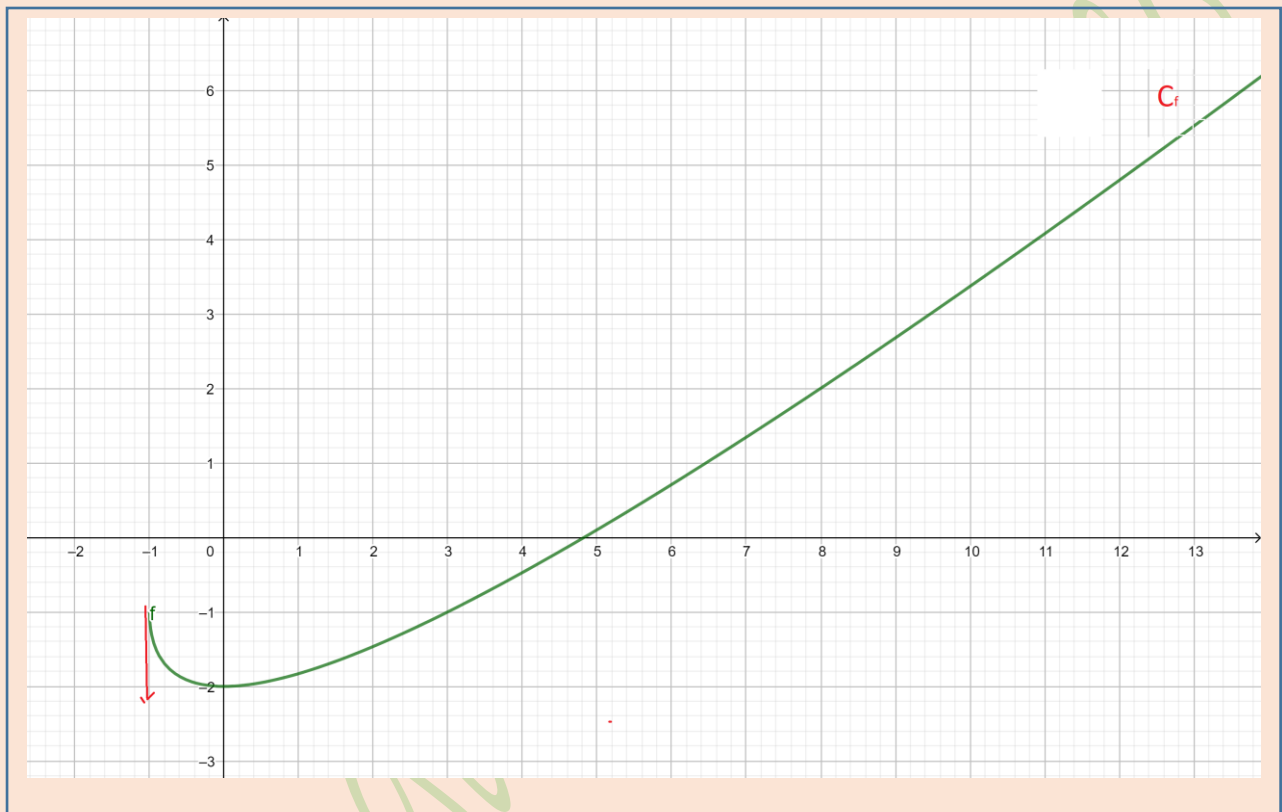
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (1-\sqrt{2})^2 \\ x+1 = (1+\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3-2\sqrt{2} \\ x+1 = 3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(1 - \sqrt{2}) \\ x = 2(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Comme $2(1 - \sqrt{2}) \in [-1; +\infty[$ et $2(1 + \sqrt{2}) \in [-1; +\infty[$; on conclut que (C_f) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives $2(1 - \sqrt{2})$ et $2(1 + \sqrt{2})$.

9) Construction de (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



Problème 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de f .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; puis interpréter géométriquement le résultat.
- 3) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
b) Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 4) a) Montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$
b) Dresser le tableau de variations de f .

5) a) Montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[; f''(x) = \frac{-x+4}{4(x-1)^2 \sqrt{x-1}}$

b) Etudier la concavité de (C_f) .

c) Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Correction Problème 2

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$\begin{aligned} 1) D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1\} \\ &=]1; +\infty[\end{aligned}$$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x-1}} \\ &= +\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0^+) \end{aligned}$$

Alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

$$\begin{aligned} 3) a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) \text{ On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \text{ calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty)$$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses aux voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}
 4) \ a) \text{ Pour tout } x \in]1; +\infty[; \text{ On a : } f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x-1}} \right)' \\
 &= \frac{(x)' \times \sqrt{x-1} - x \times (\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x-1} - x \times \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} \\
 &= \frac{\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} \\
 &= \frac{2\sqrt{x-1} \times \sqrt{x-1} - x}{2\sqrt{x-1}(x-1)} \\
 &= \frac{2(x-1) - x}{2\sqrt{x-1}(x-1)} \\
 &= \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}
 \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]1; +\infty[) ; f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

b) $f'(x)$ est du même signe que $(x-2)$; d'où le tableau de variations de f sur $]1; +\infty[$.

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	—	+	
$f(x)$	$+\infty$	$f(2)=2$	$+\infty$

$$\begin{aligned}
 5) \ a) \text{ Pour tout } x \in]1; +\infty[; \text{ On a : } f''(x) &= \left(\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \right)' \\
 &= \frac{1}{2} \left((x-2)(x-1)^{-\frac{3}{2}} \right)'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left((x-2)' (x-1)^{-\frac{3}{2}} + (x-2) \left((x-1)^{-\frac{3}{2}} \right)' \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((x-1)^{-\frac{3}{2}} + (x-2) \times \left(-\frac{3}{2} \right) \times (x-1)' \times (x-1)^{-\frac{3}{2}-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((x-1)^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{3(x-2)}{2} \right) \times (x-1)^{-\frac{5}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} + \left(-\frac{3(x-2)}{2(\sqrt{x-1})^5} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} \left(1 - \frac{3(x-2)}{2(x-1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} \left(\frac{2(x-1) - 3(x-2)}{2(x-1)} \right) \\
&= \frac{2(x-1) - 3(x-2)}{4(x-1)^2 \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{-x+4}{4(x-1)^2 \sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

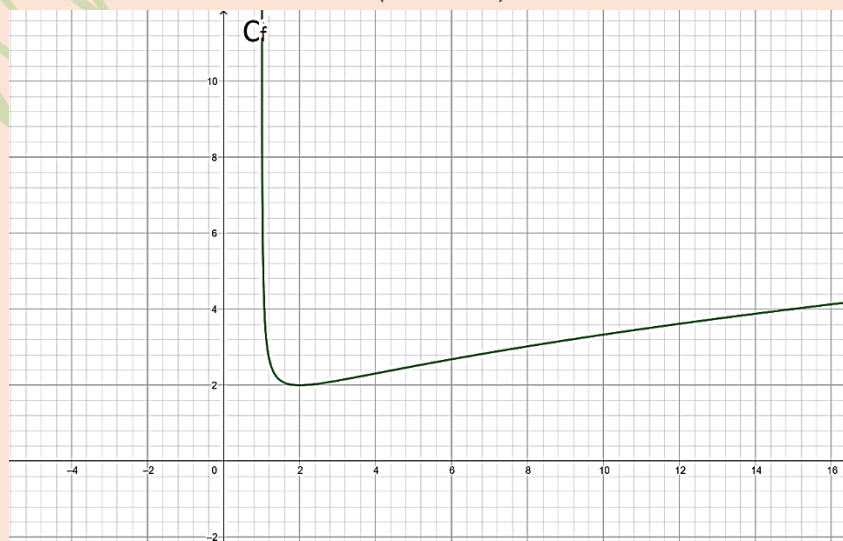
Donc : $\forall x \in]1; +\infty[; f''(x) = \frac{-x+4}{4(x-1)^2 \sqrt{x-1}}$

b) $f''(x)$ est du même signe que $(-x+4)$;

D'où $f''(x) \geq 0$ pour $x \leq 4$ et $f''(x) \leq 0$ pour $x \geq 4$

Donc (C_f) est concave sur $[4; +\infty[$ et convexe sur $]-\infty; 4]$.

c) Construction de (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



Problème 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) déterminer D_f le domaine de définition de f .
- 2) a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
b) Etudier les branches infinies de (C_f) .
- 3) Etudier la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta): y = x - 1$.
- 4) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
c) Etudier les variations de f .
- 5) Montrer que $I\left(3; \frac{16}{9}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f) .
- 6) Déterminer les points d'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses.
- 7) Construire (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 8) Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
- 9) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe de la fonction g définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; g(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right| \left| 1 - \frac{1}{x} \right|.$$

Correction Problème 3

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$$

$$2) a) \bullet \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0)$$

$$\bullet \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0)$$

$$\bullet \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty)$$

$$\bullet \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \dots FI \text{ (car } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty)$

$$\text{Pour } x \neq 0 \text{ on a : } x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x - 1 - \frac{1}{x^2}(x - 1) \\ = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)(x - 1)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)(x - 1) = +\infty$$

b) • On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - x \right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -1 \text{ (car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0)$$

D'où (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ aux voisinage de $-\infty$

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - x \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -1 \text{ (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0)$$

D'où (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ aux voisinage de $+\infty$

3) Etudions le signe de $f(x) - (x - 1)$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } f(x) - (x-1) &= x-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - (x-1) \\
 &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\
 &= (1-x) \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Donc $f(x) - (x-1)$ est du même signe que $(1-x)$; par suite :

- (C_f) est au-dessus de (Δ) : $y = x-1$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et l'intervalle $]0; 1]$
- (C_f) est au-dessous de (Δ) : $y = x-1$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$

4) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

(la fonction $x \mapsto (x-1)$; la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$)

$$\begin{aligned}
 \text{b) Pour tout } x \in \mathbb{R}^* ; \text{ on a : } f'(x) &= \left(x-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)' \\
 &= 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{(x^2)^2} \\
 &= 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \\
 &= \frac{x^3 + x - 2}{x^3} \\
 &= \frac{x^3 - 1 + x - 1}{x^3} \\
 &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + x - 1}{x^3} \\
 &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 1)}{x^3} \\
 &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x^3} \\
 &= \left(\frac{x-1}{x} \right) \frac{(x^2 + x + 2)}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \frac{(x^2 + x + 2)}{x^2}$$

c) Comme $x^2 + x + 2 > 0$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (on calcule le discriminant de l'équation du 2^{ème} degré et on trouve qu'il est négatif) ; alors $f'(x)$ est du même signe que

$$\left(\frac{x-1}{x} \right) ; \text{ d'où :}$$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	
$x-1$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

D'où f est décroissante sur l'intervalle $[0;1[$ et croissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et sur l'intervalle $]1;+\infty[$

$$5) (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \frac{(x^2+x+2)}{x^2} \\ = \frac{x^3+x-2}{x^3}$$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}^* ; \text{ on a : } f''(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)' \\ = \left(\frac{1}{x^2} \right)' - \left(\frac{2}{x^3} \right)' \\ = \frac{-2x}{x^4} - \left(\frac{-2 \times 3x^2}{x^6} \right) \\ = \frac{-2x}{x^4} + \frac{6x^2}{x^6} \\ = \frac{(-2x+6)}{x^4} \\ = \frac{2(-x+3)}{x^4}$$

D'où f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 = 3$; donc le point $I\left(3; \frac{16}{9}\right)$ est un point d'inflexion pour (C_f) .

6) Déterminer les points d'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$

$$\text{On a : } f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-1)(x-1) = 0$$

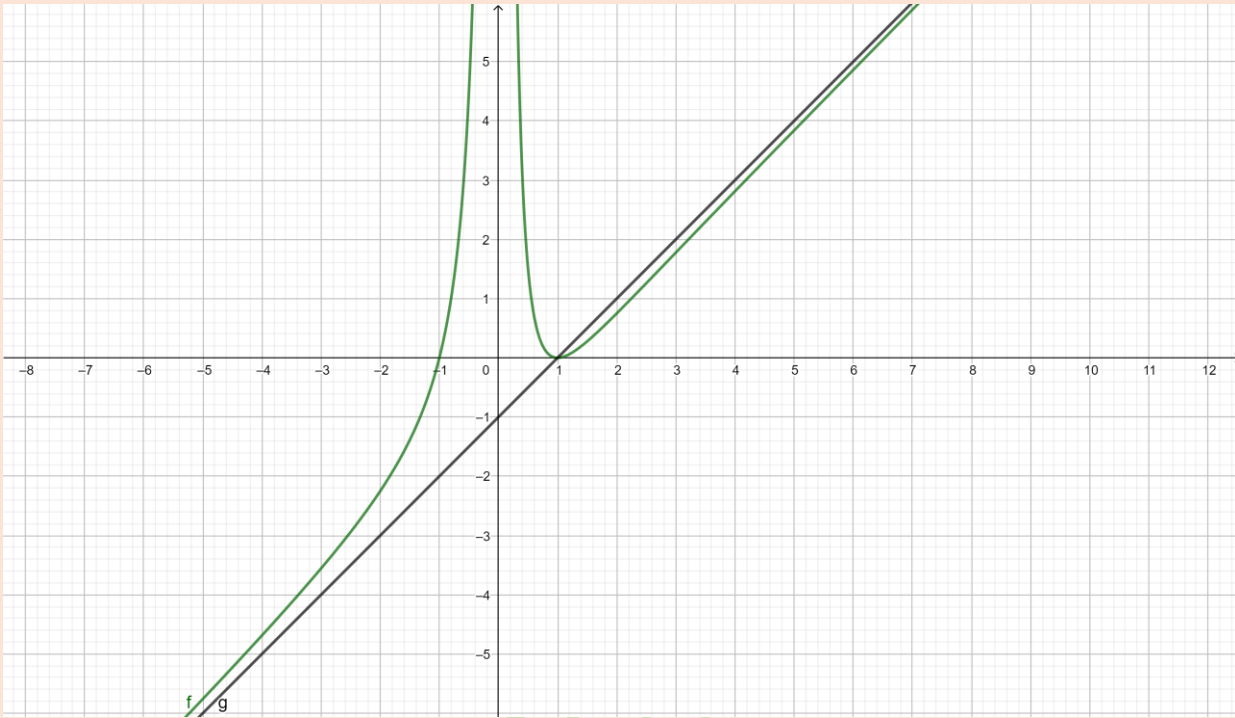
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Donc les points d'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses sont $A(-1;0)$ et $B(1;0)$.

7) Construction de (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



8) Graphiquement (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ et au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-1; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donc : • $(\forall x \in]-\infty; -1]) ; f(x) \leq 0$

• $(\forall x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[) ; f(x) \geq 0$

$$9) (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; g(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right| \left| 1 - \frac{1}{x} \right|.$$

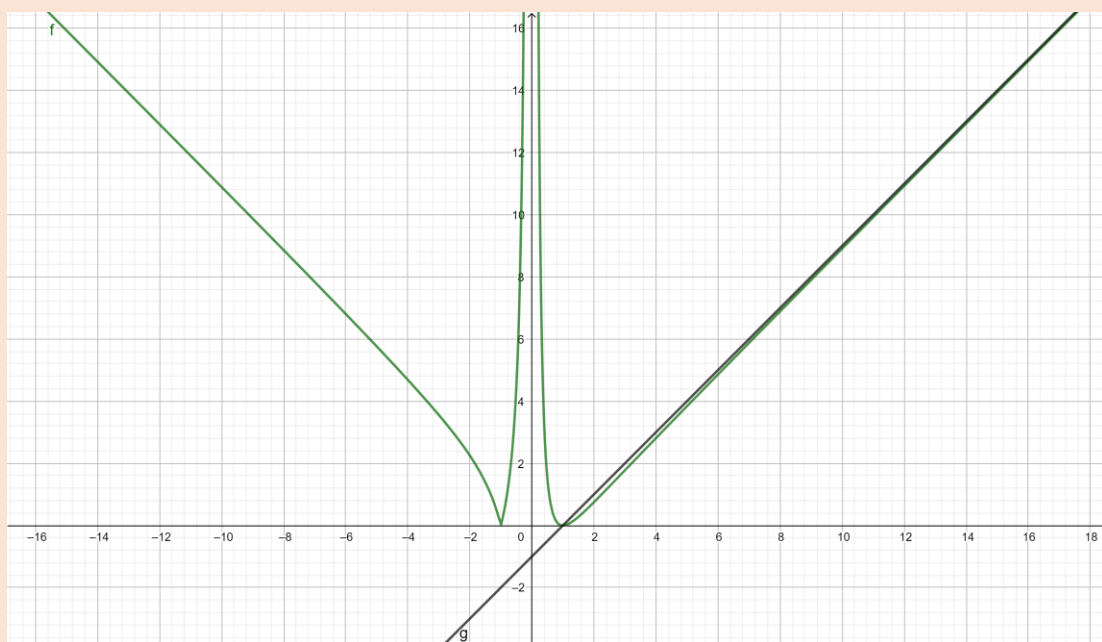
$$= \left| \left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right|$$

$$= \left| x - \frac{1}{x} - x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right|$$

$$= \left| x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right|$$

$$= |f(x)|$$

D'où la construction de la courbe de g



Problème 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \times g(-x) = 1$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; g(x) > 0$.

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2) Montrer que (C_f) admet la droite (Δ) d'équation cartésienne $y = 2x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

b) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$

d) Construire (C_f) ; (Δ) et (T) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Correction Problème 4

Partie A

$$g(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1} ; \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ Soit } x \in \mathbb{R} ; \text{ on a : } g(x) \times g(-x) &= (2x + \sqrt{4x^2 + 1})(-2x + \sqrt{4x^2 + 1}) \\ &= (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) \\ &= \left((\sqrt{4x^2 + 1})^2 - (2x)^2 \right) \\ &= 4x^2 + 1 - 4x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \times g(-x) = 1.$$

$$2) \text{ a) Soit } x \in \mathbb{R}^+ ; \text{ on a : } \begin{cases} 2x \geq 0 \\ \sqrt{4x^2 + 1} > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + \sqrt{4x^2 + 1} > 0$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; g(x) > 0.$$

$$\text{b) Soit } x \in \mathbb{R}^- ; \text{ on a : } g(x) \times g(-x) = 1$$

$$\text{Comme } (-x) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow g(-x) > 0$$

$$\text{Alors } g(x) > 0$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^-) ; g(x) > 0.$$

Partie B

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} ; \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$1) \text{ On a : } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} \right) = +\infty$$

$$\text{et } \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} \right) \dots FI.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x < 0 \text{ on a : } x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} &= \frac{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} \right) \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} \right)}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} \right)} \\ &= \frac{x^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} \right)^2}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2 - \frac{4x^2 + 1}{4}}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}\right)} \\
 &= \frac{x^2 - x^2 + \frac{1}{4}}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}\right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4}}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}\right)} = 0$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2}} \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{x^2} \right) = 4 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2}} = 1)$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} - 2x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}-x\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}+x\right)}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}+x\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}\right)^2 - x^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}+x\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+1-x^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}+x\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{4} - x^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}+x\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}+x\right)} = 0
\end{aligned}$$

Donc (C_f) admet la droite (Δ) d'équation cartésienne $y = 2x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

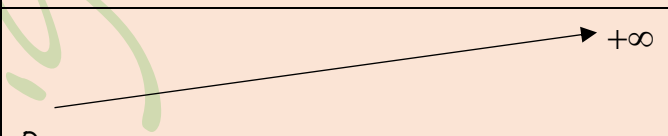
ZONE PUBLICITAIRE

3) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto x$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$) et Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1} \right)' \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{(4x^2+1)'}{2\sqrt{4x^2+1}} \\ &= 1 + \frac{8x}{4\sqrt{4x^2+1}} \\ &= 1 + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{4x^2+1} + 2x}{\sqrt{4x^2+1}} \\ &= \frac{2x + \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{4x^2+1}}$$

b) D'après la partie B question 2) on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0$; donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$; d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

c) la tangente (T) à (C_f) au point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(T) : y = x + \frac{1}{2}$$

d) Construction de (C_f) ; (Δ) et (T) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



Problème 5

1ère partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par : $g(x) = 2 - x^2 \sqrt{x^2 - 1}$.

1- Vérifier que : $x^6 - x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^4 + x^2 + 2)$

2- Etudier le signe de la fonction g sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

2ème partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$

1 - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

2- Donner le tableau de variations de f sur $[-1; 1]$

3- Calculer $f(1)$, puis montrer que : $(\forall x \in [-1; 1]); f(x) \leq 0$

3ème partie :

Soit h la fonction définie sur par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1 & \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ h(x) = \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x \in [-1; 1] \end{cases}$$

Soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - Montrer que la fonction h est continue en 1 et -1.

2- Montrer que la courbe (C_h) admet un centre de symétrie $I(0; 1)$ sur l'intervalle $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

- 3- a - Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, puis montrer que la droite (D_1) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$
- b - En déduire par symétrie que la droite (D_2) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $-\infty$
- 4- Etudier la dérivabilité de h en 1 à droite et interpréter le résultat géométriquement
- 5- a - Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
- b - En déduire le signe de $h'(x)$ sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
- 6- a - Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in [-1; 1]$.
- b - En déduire le signe de $h'(x)$ sur $[-1; 1]$.
- 7- Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.
- 8- Donner les équations des demi-tangentes à gauche de 1 et à droite de -1.
- 9- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [\sqrt{2}; +\infty[$ / $h(\alpha) = 0$ et que $2 < \alpha < 3$
- 10- Tracer (C_h) ; la droite (D_1) et la droite (D_2) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4ème partie :

Soit u la restriction de h à l'intervalle

- 1 - Montrer que u admet une fonction réciproque u^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2- Calculer $(u^{-1})'(0)$ en fonction de α .

ZONE PUBLICITAIRE

Correction Problème 5

1ère partie :

$$g(x) = 2 - x^2 \sqrt{x^2 - 1} ; \text{ pour tous } x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[.$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } (x^2 - 2)(x^4 + x^2 + 2) &= x^2(x^4 + x^2 + 2) - 2(x^4 + x^2 + 2) \\ &= x^6 + x^4 + 2x^2 - 2x^4 - 2x^2 - 4 \\ &= x^6 - x^4 - 4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; x^6 - x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^4 + x^2 + 2)$$

2) Etudions le signe de la fonction g sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$; pour cela on doit définir les solutions de l'équation $g(x) = 0$ puis étudier la monotonie de g sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{On a pour tout }]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[: \bullet \quad g(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - x^2 \sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \sqrt{x^2 - 1} = 2 \\ &\Leftrightarrow x^4 (\sqrt{x^2 - 1})^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 (x^2 - 1) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^6 - x^4 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^4 + x^2 + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(\text{Car } x^4 + x^2 + 2 > 0)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad g'(x) &= (2 - x^2 \sqrt{x^2 - 1})' \\ &= -2x \sqrt{x^2 - 1} - x^2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= -x \left(2\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= -x \left(\frac{2x^2 - 2 + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= -x \left(\frac{3x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \end{aligned}$$

Or pour $x < -1$ et $x > 1$; $3x^2 - 2 > 0$

Donc $g'(x)$ est du signe contraire de x par suite :

• g est croissante sur $]-\infty; -1]$; et $g(-\sqrt{2}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Alors soit : } x \leq -\sqrt{2} &\Rightarrow g(x) \leq g(-\sqrt{2}) \\ &\Rightarrow g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

$$-\sqrt{2} \leq x < -1 \Rightarrow g(x) \geq g(-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0$$

• g est décroissante sur $]1; +\infty[$; et $g(\sqrt{2}) = 0$

Alors soit : $1 < x \leq \sqrt{2} \Rightarrow g(x) \geq g(\sqrt{2})$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0$$

$$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow g(x) \leq g(\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

D'où le tableau de signe de g sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

2ème partie :

Pour tout $x \in [-1; 1]$: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$

$$1) \text{ Pour tout } x \in [-1; 1] ; \text{ on a : } f'(x) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 \right)'$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+3} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{(\sqrt{x^2+3})^2}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x^2+3} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\right)}{(x^2+3)}$$

$$= \frac{2(x^2+3-x^2)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \frac{6}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

Donc $(\forall x \in [-1; 1]) ; f'(x) = \frac{6}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

2) $(\forall x \in [-1; 1]) ; f'(x) > 0$

Tableau de variations de f sur $[-1;1]$

x	-1	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

$$f(1) = \frac{2 \times 1}{\sqrt{1^2 + 3}} - 1 = 0 ; \text{ et comme } f(1) \text{ est une valeur maximale pour } f \text{ sur } [-1;1] ;$$

$$\text{alors } (\forall x \in [-1;1]) ; f(x) \leq 0$$

3ème partie :

$$\text{Soit } h \text{ la fonction définie sur par : } \begin{cases} h(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1 & \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ h(x) = \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x \in [-1;1] \end{cases}$$

$$1) \bullet h(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1 = 2$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = h(-1)$; par suite h est continue à gauche en -1 .

$$\bullet h(1) = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1 = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) \neq h(1)$; par suite h n'est pas continue à droite en 1 .

On a : $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier à droite en -1 et à gauche en 1
D'où h est continue en -1 et n'est pas continue en 1 .

$$2) \text{ Sur }]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; h(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1$$

$$\text{On a } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\Rightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{Et } h(2 \times 0 - x) + h(x) &= \frac{2\sqrt{(-x)^2 - 1}}{(-x)} - (-x) + 1 + \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1 \\ &= -\frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} + x + 1 + \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1 \\ &= 2 \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\Rightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ h(2 \times 0 - x) + h(x) = 2 \times 1 \end{cases} ; \text{ d'où la courbe } (C_h) \text{ admet un}$$

centre de symétrie $I(0;1)$ sur l'intervalle $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$$3) a) \dagger \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} - x + 1 = -\infty$$

$$\dagger \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - (-x+3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 + x - 3 = 0$$

Donc la droite (D_1) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$

b) Soit $M(x; -x+3) \in D_1$ alors son symétrique par rapport à $I(0;1)$ est $M'(-x; x-1) \in D_2$; donc D_1 et D_2 sont symétriques par rapport à $I(0;1)$ et comme $I(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_h) sur l'intervalle $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; alors on déduit que la droite $D_2 : y = -x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $-\infty$

4) Etudions la dérivabilité de h en 1 à droite

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - (x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} \times \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} \times \sqrt{\frac{(x+1)}{(x-1)}} - 1 = +\infty \end{aligned}$$

ZONE PUBLICITAIRE

Donc h n'est pas dérivable à droite en 1 et la courbe (C_h) admet une demi-tangente dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse 1.

$$\begin{aligned}
 5) \text{ a) pour tout } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; \text{ on a : } h'(x) &= \left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 \right)' \\
 &= \frac{2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \times x - 2\sqrt{x^2-1}}{x^2} - 1 \\
 &= \frac{2x^2 - 2(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}} - 1 \\
 &= \frac{2 - x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}} \\
 &= \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}
 \end{aligned}$$

b) Donc $h'(x)$ est du même signe que $g(x)$ sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

D'après la partie 1 • $g(x) \leq 0$ sur $]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

Donc $h'(x) \leq 0$ sur $]-\infty; -\sqrt{2}]$ et sur $[\sqrt{2}; +\infty[$

• $g(x) \geq 0$ sur $[-\sqrt{2}; -1[\cup]1; \sqrt{2}]$

Donc $h'(x) \geq 0$ sur $[-\sqrt{2}; -1[$ et sur $]1; \sqrt{2}]$

$$\begin{aligned}
 6) \text{ a) pour tout } x \in [-1; 1] ; \text{ on a : } h'(x) &= (\sqrt{x^2+3})' \\
 &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}
 \end{aligned}$$

b) Donc $h'(x)$ est du même signe que x ;

• $h'(x) \leq 0$ sur $[-1; 0]$

• $h'(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$

7) Le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$-$
$h(x)$	$+\infty$	1	2	$\sqrt{3}$	0	1	$-\infty$

8) • l'équation de la demi-tangente à gauche de 1 est : $y_g = h'_g(1)(x-1) + h(1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3}}(x-1) + 2$$

$$= \frac{1}{2}(x-1) + 2$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

• l'équation de la demi-tangente à droite de -1 est : $y_d = h'_d(-1)(x+1) + h(-1)$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 3}}(x+1) + 2$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1) + 2$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

9) h est continue strictement décroissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$; $h([\sqrt{2}; +\infty[) =]-\infty; 1]$ et $0 \in]-\infty; 1]$ donc il existe un unique réel $\alpha \in [\sqrt{2}; +\infty[$ / $h(\alpha) = 0$.

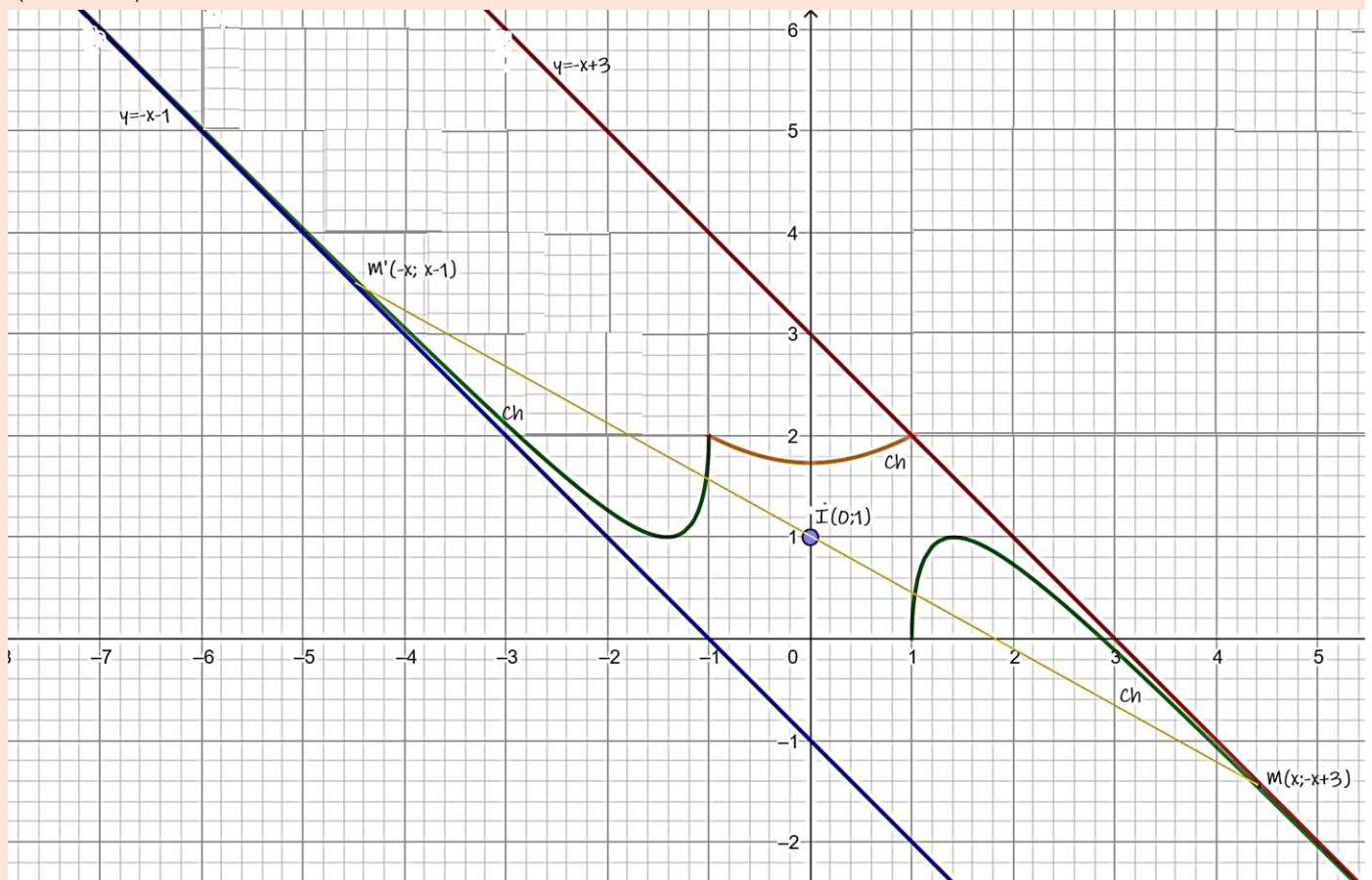
$$\text{On a : } h(2) = \sqrt{3} - 1 > 0 \text{ et } h(3) = \frac{4}{3}\sqrt{2} - 2 < 0$$

$$\text{Donc : } h(3) < 0 < h(2) \Rightarrow h(3) < h(\alpha) < h(2)$$

$$\Rightarrow 2 < \alpha < 3 \text{ (Car } h \text{ est strictement décroissante sur } [\sqrt{2}; +\infty[)$$

ZONE PUBLICITAIRE

10) Construction de (C_h) ; la droite (D_1) et la droite (D_2) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



4ème partie :

Soit u la restriction de h à l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$

$1 - u$ est continue et strictement décroissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque u^{-1} définie sur un intervalle J .

$$J = h([\sqrt{2}; +\infty[) =]-\infty; 1]$$

$$2- \text{On a : } u(\alpha) = h(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = u^{-1}(0) \text{ et } u'(\alpha) = h'(\alpha) = \frac{2 - \alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

$$\text{D'où } u'(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \text{ et } h(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} - \alpha + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2}$$

$$\text{Donc : } u'(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2 \times \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2}} - 1$$

$$= \frac{4}{\alpha^4 + \alpha^3} - 1$$

$$= \frac{4 - \alpha^4 - \alpha^3}{\alpha^4 + \alpha^3}$$

$$\text{et } 2 < \alpha < 3 \Rightarrow \begin{cases} 16 < \alpha^4 < 81 \\ 8 < \alpha^3 < 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 24 < \alpha^4 + \alpha^3 < 109$$

$$\Rightarrow -109 < -\alpha^4 - \alpha^3 < -24$$

$$\Rightarrow -105 < 4 - \alpha^4 - \alpha^3 < -20$$

$$u'(\alpha) = u'(u^{-1}(0)) \neq 0$$

$$\text{Et } (u^{-1})'(0) = \frac{\alpha^4 + \alpha^3}{4 - \alpha^4 - \alpha^3}.$$

ZONE PUBLICITAIRE