Exercice n °3 sur les suites

Exercice 3 :(avec solution)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)\ ;\ 0 < U_n < 1$

2/ Comparer U_n^2 *et* U_{n+1}^2 *; déduire la monotonie de* (U_n).

3/ On passe : $V_n = U_n^2 - 4 \quad (\forall n \in IN)$

a/ Montrer que (V_n) *est une suite géométrique et déterminer sa raison et son terme initiale.*

b/ Donner V_n *et* U_n *en fonction de n.*

c/ On pose $S_n = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2$ *pour tout* $n \in IN$

Calculer S_n en fonction de n tel que :

Correction Exercice 5 :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}} (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1/ Soit $(\mathrm{I})\left((\forall n \in IN) 0 < U_n < 2\right)$

Pour $n = 0$ *on a :* $0 < U_0 = \dfrac{1}{2} < 2$ *Donc* (I) *est vérifiée.*

Pour $n \in IN$ *supposons que* (I) *est vérifiée pour* $(n+1)$.

On a : $U_{n+1} = \sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}} > 0$.

Calculons $U_{n+1} - 2$: $U_{n+1} - 2 = \sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}} - 2$ *(on multiplie par la partie conjugué)*

$$\Rightarrow = \frac{\left(\sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}}\right)^2 - 4}{\sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}}+2} = \frac{2+\dfrac{U_n^2}{2}-4}{\sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}}+2}$$

$$\Rightarrow = \frac{U_n^2 - 4}{2\left(\sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}}+2\right)} = \frac{(U_n-2)(U_n+2)}{2\left(\sqrt{2+\dfrac{U_n^2}{2}}+2\right)} \left(\text{or } (U_n-2)<0\right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 2$$

1. ***Conclusion :*** *On a montré par récurrence que :* $(\forall n \in IN) 0 < U_n < 2$

2/ Calculons $\left(U_{n+1}^2 - U_n^2\right)$:

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \left(\sqrt{2+\frac{U_n^2}{2}}\right)^2 - U_n^2$$

$$\Rightarrow 2+\frac{U_n^2}{2} - U_n^2 = 2-\frac{U_n^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4-U_n^2}{2} = \frac{1}{2}(2-U_n)(2+U_n)$$

$$\Rightarrow U_{n+1}^2 - U_n^2 > 0\left(\text{Car}\,(2-U_n)<0 \text{ et } (2+U_n>0)\right)$$

Donc : $(\forall n \in IN) U_{n+1}^2 > U_n^2$ *et puisque* $(\forall n \in IN) U_n > 0$

On a : $(\forall n \in IN) U_{n+1} > U_n$ *d'où :* (U_n) *est une suite croissante.*

3/ $(\forall n \in IN) V_n = U_n^2 - 4$

a/ calculons V_{n+1} *:*

$$V_{n+1} = U_{n+1}^2 - 4$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 2+\frac{U_n^2}{2} - 4 \Rightarrow V_{n+1} = \frac{U_n^2}{2} - 2$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n^2 - 4) \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

<u>Conclusion</u> : (V_n) *est une suite géométrique de raison* $q=\frac{1}{2}$ *et de premier Terme* $V_0 = -\frac{15}{4}$

b / $(\forall n \in IN) V_n = V_0 \times q^n$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) V_n = -\frac{15}{4} \times \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) V_n = -\frac{15}{2^{n+2}}$$

On a : $V_n = U_n^2 - 4 \, (\forall n \in IN)$

$$\Rightarrow U_n = \sqrt{4+V_n} \, (\forall n \in IN)$$

$$\Rightarrow U_n = \sqrt{4+\frac{15}{2^{n+2}}} \, (\forall n \in IN)$$

c / *Soit* $S_n = U_0^2 + U_1^2 + \ldots. + U_n^2$

On a : $V_n = U_n^2 - 4 \Rightarrow U_n^2 = V_n + 4$ *Donc :* $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n + 4\times(n+1)$

$$\Rightarrow S_n = (V_0 + V_1 + \ldots + V_n) + 4\times(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n=-\frac{15}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)+4\times(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n=-\frac{15}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}+4\times(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n=-\frac{15}{4}\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+4\times(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{15\left(1-2^n\right)}{2^{n+1}}+4\times(n+1)$$