Série n°5 d'exercices corrigés sur les suites numériques

Exercice n°1

Soit $\alpha \in IR^*$ *et la suite* (u_n) *définie sur* IN^* *par :* $u_n = \dfrac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha}$.

1) Montrer que (u_n) *est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.*

2) Pour tout $n \in IN^*$*, on pose :* $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Calculer S_n *en fonction de α et n.*

3) Soit la suite v définie sur IN^* *par :* $v_n = \dfrac{S_n}{n^2}$

Montrer que la suit (v_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Correction Exercice n°1

1) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\alpha^2 + (n+1-1)}{\alpha} - \dfrac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha}$

$$= \frac{\cancel{\alpha^2} + \cancel{n} - \cancel{\alpha^2} - \cancel{n} + 1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

donc (u_n) *est une suite arithmétique de raison* $\dfrac{1}{\alpha}$ *et de premier terme* $u_1 = \alpha$.

2) Pour tout $n \in IN^*$ *; on a :* $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ *(somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique)*

$$S_n = \frac{n}{2}\left(\alpha + \frac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha}\right) = \frac{n}{2\alpha}\left(2\alpha^2 + n - 1\right).$$

3) Pour tout $n \in IN^*$ *; on a :* $v_n = \dfrac{S_n}{n^2} = \dfrac{1}{2n\alpha}\left(2\alpha^2 + n - 1\right) = \dfrac{2\alpha^2 - 1}{2n\alpha} + \dfrac{1}{2\alpha}$.

La suite $n \mapsto \dfrac{2\alpha^2 - 1}{2n\alpha}$ *est convergente et elle converge vers 0*

Donc la suite (v_n) *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2\alpha}$

Exercice n°2

Soient les suites (u_n) *et* (v_n) *définies sur* IN^* *par :* $u_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + ... + \dfrac{1}{n\times(n+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\times(k+1)}$

et $v_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$

Montrer que les suites (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes et déterminer la limite de la suite* (u_n)

(On pourra remarquer que $\dfrac{1}{k\times(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$*)*

Correction Exercice n°2

Etude de la suite (u_n)

Soit $n \in IN^*$ $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\times(k+1)}$ *; or* $\dfrac{1}{k\times(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ *;donc*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad Car \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

(en effectuant un changement d'indice)

D'où $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Si vous détester le symbole $\sum$ *alors vous pouvez le faire autrement:*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\times(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Etude de la suite (v_n) *Pour tout entier* $k \geq 2$ *, on a :* $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

Donc $v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

OR $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = u_{n-1}$ *; donc* $v_n \leq 1 + u_{n-1}$ *; d'où* $v_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$ *et comme pour tout* $n \in IN^*$ $1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$

Alors (v_n) *est majorée par* 2 .

(ce qui est vrai pour n=1 aussi)

pour tout $n \geq 1$ *; on montre comme précédemment par changement d'indice que :* $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

et $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$

donc la suite (v_n) *est croissante.*

<u>Conclusion</u>: La suite (v_n) *est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente.*

On a : pour tout $n \geq 1$ *;* $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *et comme* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Alors la suite (u_n) *est convergente de limite* 1 .

<u>Exercice n°3</u>

Soit (u_n) *la suite définie sur* IN^* *par :* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Montrer que pour tout entier $n \in IN^*$ *;* $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

En déduire que la suite (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

<u>Correction Exercice n°3</u>

On a : $\forall k \in \{1;2;3;\dots;n\}$ $\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$

Donc $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ *En faisant la somme membre à membre de ces n encadrements on obtient :* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

On a pour tout $n\in IN^*$; $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\dfrac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ et $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$

Alors la suite (u_n) est convergente de limite 1 .

Exercice n°4

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}u_n \quad (\forall n\in IN^*) \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$; on a : $\dfrac{1}{4}\le u_n\le 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Pour tout entier $n\in IN^* n$, on pose : $v_n=\dfrac{1}{n}u_n$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b) Exprimer v_n en fonction de n et déduire que pour tout $n\in IN^*$; on a : $u_n=\dfrac{n}{2^n}$

3) a) En remarquant que pour $n\in IN^*$; $(n+1)^2=n^2\left(1+2n+\dfrac{1}{n^2}\right)$; montrer à l'aide d'un raisonnement

par récurrence que pour tout entier $n\ge 4$ on a : $n^2\le 2^n$.

b) Déduire alors la limite de la suite (u_n) .

Correction Exercice n°4

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in IN^*)$; $0\le u_n\le 1$.

Pour $n=1$

$u_1=\dfrac{1}{2}$ donc $0\le u_1\le 1$

Soit $n\in IN^*$

Supposons que $0\le u_n\le 1$ et montrons que : $0\le u_{n+1}\le 1$

On a : $0\le u_n\le 1\Rightarrow 0\le \dfrac{n+1}{2n}u_n\le\dfrac{n+1}{2n}$

$\Rightarrow 0\le u_{n+1}\le\dfrac{n+1}{2n}$

Or : $\dfrac{n+1}{2n}-1=\dfrac{n+1-2n}{2n}=\dfrac{1-n}{2n}\le 0$

Donc : $\dfrac{n+1}{2n}\le 1$; d'où : $0\le u_{n+1}\le 1$

Conclusion :

$(\forall n\in IN^*)$; $0\le u_n\le 1$.

b) Pour tout $n\in IN^*$; on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2n}u_n-u_n$$
$$=\left(\frac{n+1-2n}{2n}\right)u_n$$
$$=\frac{1-n}{2n}\times u_n$$

donc $u_{n+1}-u_n\leq 0$ *(Car* $n\geq 1$ *et* $u_n\geq 0$*)*

Par suite la suite (u_n) *est décroissante.*

c) La suite (u_n) *est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente.*

2) a) Pour tout $n\in IN^*$ *; on a :* $v_{n+1}=\frac{1}{n+1}u_{n+1}$
$$=\frac{1}{\cancel{n+1}}\times\frac{\cancel{n+1}}{2n}u_n$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}u_n$$
$$=\frac{1}{2}\times v_n$$

Donc : $(\forall n\in IN^*)$; $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times v_n$

D'où (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et vde premier terme* $v_1=\frac{1}{2}$.

b) Par suite : $(\forall n\in IN^*)$; $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times v_1=\frac{1}{2^n}$.

2) a) On note $P(n)$ *la propriété :* $n^2\leq 2^n$ *; pour* $n\geq 4$.

<u>Pour n=4</u>

On $4^2=16$ *et* $2^4=16$ *donc P(4) est vraie .*

<u>Hérédité</u> :

<u>Soit n> 4</u>

Supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est aussi vraie.

On a : $n^2\leq 2^n$ *et* $(n+1)^2=n^2\left(1+2n+\frac{1}{n^2}\right)$

Et comme $n\geq 4\Rightarrow\frac{2}{n}\leq\frac{1}{2}$ *et* $n\geq 4\Rightarrow\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{2}$ *; alors*

$$1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\leq 2\Rightarrow(n+1)^2=n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\leq 2n^2$$

D'où : $(n+1)^2\leq 2n^2\leq 2\times 2^n=2^{n+1}$ *(CQFD)*

<u>Conclusion</u>

On a montré par récurrence que : pour tout entier $n\geq 4$ *on a :* $n^2\leq 2^n$.

b) Pour tout entier naturel n supérieur à 4 on a : $u_n=n\times v_n=\frac{n}{2^n}$

et d'après ce qui précède on a : $n^2\leq 2^n\Rightarrow 0\leq\frac{n}{2^n}\leq\frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

donc la suite (u_n) *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.