Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur IR par: $f(x)=e^{2x}+2e^{x}-4x-3$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, et donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-4x-3)$ et en déduire que (C) admet comme asymptote oblique la droite (Δ) dont on déterminera une équation.

2) a. Montrer que : $f'(x)=2(e^{x}-1)(e^{x}+2)$ pour tout x de IR.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de IR, puis dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer la courbe (C).

Solution

1) a. Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

■ Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit $x\in IR^{*}$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+2e^{x}-4x-3\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2e^{2x}}{2x}+2\frac{e^{x}}{x}-4-\frac{3}{x}\right)\quad \left(car:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2x}=+\infty\ \ et\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty\right)$$

$$=+\infty$$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

■ Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

Soit $x>0$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}+2e^{x}-4x-3}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^{2x}}{2x}+2\frac{e^{x}}{x}-4-\frac{3}{x}\right)\quad \left(car:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2x}=+\infty\ \ et\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty\right)$$

$$=+\infty$$

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty}$

Interprétation géométrique:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Donc la courbe (C) admet une admet une

branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b. Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

■ *On a:* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+2e^{x}-4x-3\right) \ = +\infty$ *(car :* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ *)*

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = +\infty}$

■ *Calculons:* $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-(-4\boldsymbol{x}-3)$

On a : $f(x)-(4x-3)=e^{2x}+2e^{x}$ *pour tout x de R,*

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-(-4\boldsymbol{x}-3) = \lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{e}^{2x}+2\boldsymbol{e}^{x}$

donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-(-4\boldsymbol{x}-3)=0}$ *(car :* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ *)*

<u>Conclusion</u>:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-(-4\boldsymbol{x}-3)=0$

Donc la droite d'équation $y=4x-3$ *est une asymptote oblique à* $(\boldsymbol{C})$ *au voisinage de* $-\infty$ *.*

2) a. Montrons que : $(\forall x\in IR)\ \ f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+2\right)$

La fonction f est dérivable sur IR,

Soit $x\in IR$ *on a :* $f'(x)=\left(e^{2x}+2e^{x}-4x-3\right)'$

$$\begin{aligned}
&= 2e^{2x}+2e^{x}\\
&= e^{2x}-4+e^{2x}+2e^{x}\\
&= \left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}+2\right)+e^{x}\left(e^{x}+2\right)\\
&= \left(\left(e^{x}-2\right)+e^{x}\right)\left(e^{x}+2\right)\\
&= 2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+2\right)
\end{aligned}$$

Donc: $(\forall x\in \mathbb{R})$ $\boxed{f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+2\right)}$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *.*

Soit $x\in\mathbb{R}$ *on a :* $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+2\right)$ *et* $\left(e^{x}+2\right)>0$

Donc le signe de $f(x)$ *est celui de* $\left(e^{x}-1\right)$ *c'est-à-dire le signe de x sur* $\mathbb{R}$

D'où le tableau de signe de f '(x) est le suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

<u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3) <u>La courbe</u> $(\boldsymbol{C})$