Problème

I. On considère l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ y''-2y'+y=0$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la fonction h solution de (E) et sa courbe passe par le point $O(0;0)$ et la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0 admet -1 comme coefficient directeur.
3. Vérifie que : la fonction $g(x)=2-xe^{x}$ est solution l'équation $(E_1)\ :\ y''-2y'+y=2$.

II. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2-xe^{x}$

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. a. Calculer $g'(x)$ la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$; puis donné le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $g(\alpha)=0$ et $0{,}8<\alpha<0{,}9$.

   c. On déduit que le signe $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

III. On considère la fonction f définie sur par : $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité de mesure est 2 cm).

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; puis donner une inter présentation géométrique du résultat obtenue.
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique la droite (Δ_1) au voisinage de $-\infty$ et déterminer son équation.
4. a. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ_1).

   b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x$.
5. a. Montrer que : pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^{x}+2)^{2}}$.

   b. On déduit le signe de $f'(x)$.

   c. Démontrer que : $f(\alpha)=\alpha$.

   d. Dresser le tableau des variations de f.

   e. Construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) et les deux droites (Δ_1) et (Δ).
6. On considère la fonction k la restriction de f sur $I=[-1;\alpha]$.

   a. Montrer que : k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

   b. Vérifier que : $k(0)=\dfrac{2}{3}$ puis montrer que k^{-1} est dérivable en $\dfrac{2}{3}$ et déterminer

$\left(k^{-1}\right)'\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

c. Construire $\left(C_{k^{-1}}\right)$ la courbe représentative de k^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

IV. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq \alpha$.

2. a. On utilise (C_f) et la droite (Δ) présenter sur l'axe des abscisses : u_0 ; u_1 et u_2.

b. Donner la conjoncture sur la monotonie de (u_n).

c. Prouver la validité de la conjoncture.

d. On déduit que : (u_n) est convergente.

e. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 2

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E): z^2 - 2z + 5 = 0$.

1. Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E) tel que : $\operatorname{Im}(z_1) > 0$.

2. En déduit la solution générale de l'équation différentielle suivante :
$(E): y'' - 2y' + 5y = 0$.

II. Soit le nombre complexe : $a = 1 + i\left(2 - \sqrt{3}\right)$

1. Montrer que : le module de a est $\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

2. Vérifier que : $a = 2\sin\dfrac{\pi}{6} + 2i\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. a. θ est un nombre réel montrer que : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ (on rappelle que :
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

b. Montrer que : $a = 4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12} + 4i\sin^2\dfrac{\pi}{12}$ (on rappel que: $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$)

c. Montrer que : $4\sin\dfrac{\pi}{12}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ est la forme trigonométrique de a ; puis en déduire la valeur de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

III. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectivement $a = 1 + i\left(2 - \sqrt{3}\right)$ et b. soit R la rotation de centre O origine du repère et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

01. Donner la forme trigonométrique de b l'affixe de B image de A par la rotation R.

Exercice 3

Dans un laboratoire d'essaies scientifiques une cage contient 5 lapins indiscernables au touche dont 2 lapins de la catégorie 2 et 2 lapins de la catégorie 5 et 1 lapin de la catégorie 4 .

I. On considère l'expérience suivante : un chercheur tire au hasard et simultanément deux lapins de la cage sachant que tous les lapins ont même probabilités d'être tirés.

01. Calculer probabilité de l'événement suivante

C : « les 2 lapins tirés sont de même catégorie » .

02. Calculer probabilité de l'événement suivante

D : « les 2 lapins tirés n'ont pas même parité de la catégorie».

II. Soit la variable aléatoire X définie par « il associe à chaque tirage le produit des numéros de leurs catégories ».

01. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X.

02. Déterminer la loi de probabilité de X.

03. Est-ce que les événements C et $(X=10)$ sont indépendants.

III. On répète l'expérience précédente quatre fois et à chaque fois on remet les lapins à la cage avant de répété l'expérience.

01. Calculer la probabilité de l'événement K « l'événement C se réalise une fois et une seule lorsqu'on répète l'expérience quatre fois»

02. On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois que l'événement C est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent quatre fois »

a. Comment on appelle la variable aléatoire Y et on précise ses paramètres.

b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y).

c. Donner $p(Y=k)$ avec $k \in X(\Omega)$.

d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

04. Pour déterminer deux questions à un examen d'orale ; l'étudiant tire au hasard deux cartes l'une après l'autre d'une boite contenant 6 cartes qui concernent les questions de mathématique (on les désigne par m) et 4 cartes qui concernent les questions de la physique(on les désigne par p) ; on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher.

a. Compléter l'arbre de probabilités (ci- contre)

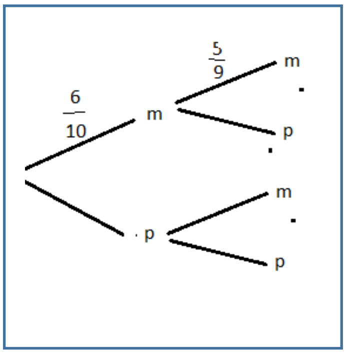
b. On considère les événements suivants :

A « les deux cartes tirées sont de la physique »

B « les deux cartes tirées ne sont pas de la même matière ».

Montrer que : ( ) 2 p A 15 = et ( ) 8 p B 15 = .

c. On considère la variable aléatoire X définie par



« il associe à chaque tirage de deux cartes le nombre de cartes de physique tirées »

a. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 4

Dans l'espace (E) est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On considère : •Les deux points $A(2;0;-1)$; $B(0;-3;4)$ et $C(-1;2;0)$.

01. a. Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-13\vec{i}-13\vec{j}-13\vec{k}$.

b. Est-ce que les points A et B et C sont alignés.

c. Déterminer les cordonnés du vecteur : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Est-ce que les points A ; B et C sont alignés.

d. On déduit qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+y+z-1=0$.

e. Calculer : la surface du triangle ABC.

02. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par $\Omega(5;0;2)$ et orthogonale au plan (ABC) .

b. Vérifie que la projection orthogonale du point Ω sur le plan (ABC) est le point $H(3;-2;0)$.

c. Vérifie que la distance $\Omega H=2\sqrt{3}$.

d. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S_1) de centre Ω et de rayon $r=2\sqrt{3}$

e. Déterminer la position relative du plan (ABC) et la sphère (S1) .

03. Soit (S_2) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace (E) qui vérifie la relation suivante : (S_2) : $x^2+y^2+z^2-2x+8y+4z+5=0$.

Déterminer la nature de (S_2) et ses éléments caractéristiques.

04. a. Calculer la distance du point $I(1;-4;-2)$ au plan (ABC).

b. On déduit que le plan (ABC) coupe la sphère (S_2) selon un cercle(Γ).

c. Déterminer R_Γ le rayon de (Γ) . Puis les cordonnés du point I_Γ centre de (Γ) .