GUESSMATHS

Revue n°4 :

Chapitre « Fonction logarithme et fonction Exponentielle»

2éme Bac SC.Exp et Sciences Eco

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »

Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com

whatsapp : 0604488896

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition

On appelle logarithme népérien la fonction primitve sur $]0;+\infty[$ de la fonction inverse définie sur IR^* par : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est la fonction :

$$\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log** est définie par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Conséquences :

a) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

II. Propriété de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

2) Conséquences

Corollaires :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

d) $\ln x^n = n \ln x$ avec n entier relatif

III. Etude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Propriété :

La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;+\infty[$.

Propriété :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2) Variations

Propriété :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Corollaires :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

3) Limites aux bornes

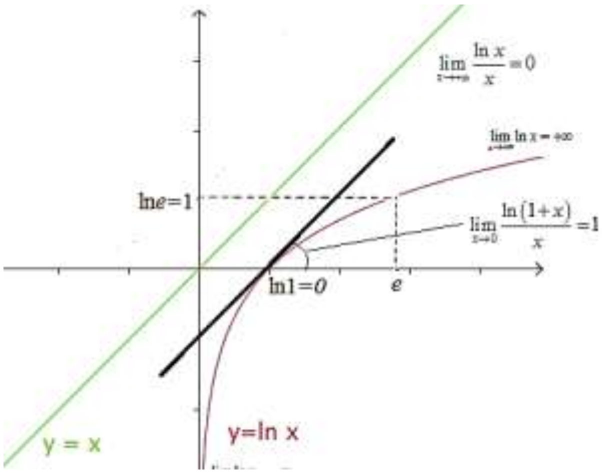
Propriété :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

4) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



IV. Limites et croissances comparées

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$

Remarque :

Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Propriétés :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

V. Fonctions de la forme ln u

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln u(x)$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto \ln u(x)$ ont le même sens de variation.

Exercice n°1.

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$A=\ln 8$; $B=\ln\frac{1}{16}$; $C=\frac{1}{2}\ln 16$; $D=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$

2) Exprimez en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :

$a=\ln 24$; $b=\ln 144$; $c=\ln\frac{8}{9}$

3) Ecrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme :

$A=2\ln 3+\ln 2+\ln\frac{1}{2}$ $\qquad$ $B=\frac{1}{2}\ln 9-2\ln 3$

Exercice n°2.

Comparez les réels x et y : $\quad x=3\ln 2$ et $y=2\ln 3$

$x=\ln 5-\ln 2$ et $y=\ln 12-\ln 5$

Exercice n°3.

Simplifier au maximum :

$a=\ln\left(e^{2}\right)$; $b=\ln\left(e^{3}\right)$; $c=\ln\left(\frac{1}{e^{2}}\right)$; $d=\ln\left(\sqrt{e}\right)$; $f=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$

Exercice n°4.

Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(2+5x)=\ln(x+6)$

2) $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$

3) $\ln x=2$

4) $\dfrac{2(1+\ln x)}{x}=0$

5) $(\ln x)^2+\ln x-6=0$

6) $\ln(2x-5)=1$

7) $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)=0$

8) $\ln\left(\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0$

9) $\ln(x-1)=\ln(2x-1)$

10) $\ln(|x-1|)=\ln(2x-1)$

11) $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)$

Exercice n°5.

1) Développer l'expression : $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

2) Résoudre les équations suivantes :

(a): $\ln(x^3+2)=\ln(2x^2+x)$

(b): $\ln(|x|^3+2)=\ln(2x^2+|x|)$

(c): $\ln(x^3-x^2-3x+3)=\ln(x^2-2x+1)$

(d): $\ln(x^3-x^2-3x+3)=2\ln(x-1)$

Exercice n°6.

Résoudre le système d'équations suivant :

1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \ln xy=5 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$

Exercice n°7.

Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2+5x)\leq\ln(x+6)$

2) $\ln(x-1)+\ln(x-3)<\ln 3$

3) $\ln x>2$

4) $\dfrac{2(1+\ln x)}{x}>0$

5) $(\ln x)^2+\ln x-6\leq 0$

6) $\ln(2x-5)\geq 1$

7) $(1,2)^n\geq 4 \quad (n\in IN)$

8) $(0,8)^n\geq 0,1 \quad (n\in IN)$

Exercice n°8.

Etudier le signe des expressions suivantes :

$A(x)=\ln x(\ln x+1)$ $B(x)=2x\ln(1-x)$

$C(x)=-x^2\ln(x+1)$

Exercice n°9.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln\left(x^2+3x-4\right)$ 2) $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x^2}{x}\right)$

3) $f(x)=\ln\left(4-x^2\right)-\ln x$ 4) $f(x)=\ln\left(x^2-4\right)-\ln(-x)$

Exercice n°10.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}((1-x)\ln x)$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-4+\ln x)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\right)$

Exercice n°11.

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

1) $f(x)=-\dfrac{x}{2}+1+2\ln x$ 2) $f(x)=\dfrac{2\ln x}{\ln 3}$

3) $f(x)=\ln(4-x)+\ln x$ 4) $f(x)=x\ln x-x$

5) $f(x)=x^2\ln x$ 6) $f(x)=\ln(2x-5)$

7) $f(x)=\ln(-3x+1)$ 8) $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$

9) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ 10) $f(x)=\ln(\ln x)$

11) $f(x)=x\ln(2x-3)$ 12) $f(x)=2x(1-\ln x)$

13) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 14) $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x^2}$

15) $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-4$ 16) $f(x)=\ln x^2$

17) $f(x)=(\ln x)^2$ 18) $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$

Exercice n°12.

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln(ax+b)$, et C sa courbe représentative.

1) Déterminer les nombres a et b tels que $f(2)=0$ et $f'(3)=\dfrac{3}{4}$

Quel est alors l'ensemble de définition de f ?

Quel est le sens de variation de f ?

2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point A(2 ;0) et la tangente en A ait pour coefficient directeur −2.

Exercice n°13.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2\ln x$

1) Etudier le sens de variation de g
2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter géométriquement ce résultat.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C). Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0;+\infty[$. Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera
3) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées du point B
5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α. Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que : $31.10^{-2}<\alpha<35.10^{-2}$
6) Représenter la courbe (C) ; la tangente (T) et la droite (Δ).

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN CORRECTION

Exercice n°1.

1) • $A=\ln 8=\ln\left(2^3\right)=\boxed{3\ln 2}$

• $B=\ln\frac{1}{16}=-\ln 16=-\ln 2^4=\boxed{-4\ln 2}$

• $C=\frac{1}{2}\ln 16=\frac{1}{2}\ln 2^4=\frac{1}{2}\times 4\ln 2=\boxed{2\ln 2}$

• $D=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}\ln 4=-\frac{1}{2}\ln 2^2=-\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\ln 2=-\ln 2$

2) $a=\ln 24=\ln\left(3\times 8\right)=\ln 3+\ln 2^3=\boxed{\ln 3+3\ln 2}$

$b=\ln\left(144\right)=\ln\left(12\right)^2=2\ln\left(3\times 4\right)=2\ln\left(3\times 2^2\right)$

$=2\ln 3+2\ln 2^2=\boxed{2\ln 3+4\ln 2}$

$c=\ln\left(\frac{8}{9}\right)=\ln\left(\frac{2^3}{3^2}\right)=\ln 2^3-\ln 3^2=\boxed{3\ln 2-2\ln 3}$

3) $A=2\ln 3+\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 3^2+\cancel{\ln 2}-\cancel{\ln 2}=\boxed{\ln 9}$

$B=\frac{1}{2}\ln 9-2\ln 3=\ln\left(\sqrt{9}\right)-2\ln 3=\ln 3-2\ln 3=-\ln 3=\boxed{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

Exercice n°2.

■ $x=3\ln 2=\ln 2^3=\ln 8$ et $y=2\ln 3=\ln 3^2=\ln 9$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $8<9$; alors $x<y$

■ $x=\ln 5-\ln 2=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ et $y=\ln 12-\ln 5=\ln\left(\frac{12}{2}\right)$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\frac{5}{2}<\frac{12}{2}$; alors $x<y$

Exercice n°3.

- $a=\ln\left(e^2\right)=2\ln e=2\times 1=2$
- $b=\ln\left(e^3\right)=3\ln e=3\times 1=3$
- $c=\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-\ln e^2=-2\ln e=-2$
- $d=\ln\left(\sqrt{e}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln e=\dfrac{1}{2}$
- $f=\ln\left(e\sqrt{e}\right)=\ln e+\ln\left(\sqrt{e}\right)=1+\dfrac{1}{2}\ln e=\dfrac{3}{2}$

Exercice n°4.

1) $\boxed{\ln(2+5x)=\ln(x+6)}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow\begin{cases}2+5x>0\\ x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{2}{5}\\ x>-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[\\ x\in\left]-6;+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap\left]-6;+\infty\right[\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$

$$\ln(2+5x)=\ln(x+6)\Leftrightarrow 2+5x=x+6$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

Comme $1\in\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\{1\}}$.

2) $\boxed{\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\ x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]1;+\infty\right[\\ x\in\left]3;+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[\cap\left]3;+\infty\right[\Leftrightarrow x\in\left]3;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]3;+\infty\right[$

$$\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3\Leftrightarrow\ln\left((x-1)(x-3)\right)=\ln 3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0\quad ou\quad x-4=0$$
$$\Leftrightarrow x=0\quad ou\quad x=4$$

Comme $0\notin\left]3;+\infty\right[$ et $4\in\left]3;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\{4\}}$.

3) $\boxed{\ln x=2}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow x\in\left]0;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]0;+\infty\right[$

$$\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \times \ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln x = \ln e^2$$
$$\Leftrightarrow x = e^2$$

Comme $e^2 \in \left]0;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S = \left\{e^2\right\}}$

4) $\boxed{\dfrac{2(1+\ln x)}{x} = 0}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]0;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]0;+\infty\right[$

$$\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -\ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Comme $\dfrac{1}{e} \in \left]0;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{e}\right\}}$.

5) $\boxed{(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]0;+\infty\right[$

On pose $X = \ln x$ on obtient : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$

Que l'on sait résoudre on a comme solutions : $X = 2$ et $X = -3$

$$(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 2 \\ \ln x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ x = e^{-3} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{S = \left\{e^2; e^{-3}\right\}}$

6) $\boxed{\ln(2x-5)=1}$

$$x\in D_{Et} \Leftrightarrow 2x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2} \Leftrightarrow x\in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$$\ln(2x-5)=1 \Leftrightarrow \ln(2x-5)=\ln e$$
$$\Leftrightarrow 2x-5=e$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{e+5}{2}$$

Comme $\frac{e+5}{2}\in]0;+\infty[$ alors : $\boxed{S=\left\{\frac{e+5}{2}\right\}}$.

7) $\boxed{\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0}$

$$x\in D_{Et} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}>0$$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{2x-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc : $D_{Et}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

$$\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=\ln 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1$$
$$\Leftrightarrow x-\cancel{1}=2x-\cancel{1}$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

Comme $0\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$ alors : $\boxed{S=\{0\}}$.

8) $\boxed{\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0}$

$$x\in D_{Et} \Leftrightarrow 2x-1\neq 0 \quad et \quad \frac{x-1}{2x-1}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2} \; et \; x\neq 1$$ Donc :

$$D_{Et}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

$$\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=\ln 1$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{2x-1}=1\quad ou\quad\frac{x-1}{2x-1}=-1$$

$$\Leftrightarrow x=0\quad ou\quad x=\frac{2}{3}$$

Comme $0\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ et $\frac{2}{3}\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ alors :

$\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$.

9) $\boxed{\ln(x-1)=\ln(2x-1)}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]1;+\infty\right[\\x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]1;+\infty\right[$

$$\ln(x-1)=\ln(2x-1)\Leftrightarrow x-1=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Comme $0\notin\left]1;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\varnothing}$.

10) $\boxed{\ln(|x-1|)=\ln(2x-1)}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$$\ln(|x-1|)=\ln(2x-1)\Leftrightarrow|x-1|=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x-1=2x-1\quad ou\quad x-1=-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x=0\quad ou\quad x=\frac{2}{3}$$

Comme $0 \notin \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$ et $\frac{2}{3} \in \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$ alors $\boxed{S=\left\{\frac{2}{3}\right\}}$

11) $\boxed{\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$$

Donc : $D_{Et} = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[= IR-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$

$$\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|) \Leftrightarrow |x-1|=|2x-1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2x-1 \\ x-1=-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Comme $0 \in IR-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$ et $\frac{2}{3} \in IR-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$ alors $\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$

Exercice n°5.

1) $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

$$=(x^2-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$$

2) Résoudre les équations suivantes :

- $\boxed{(a): \ln(x^3+2)=\ln(2x^2+x)}$ Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation

L'équation est bien définie si et seulement si

$$\begin{cases} x^3+2>0 \\ 2x^2+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3>-2 \\ x(2x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\sqrt[3]{2} \\ x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]0;+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup]0;+\infty[$$

$$D_{ét} = \left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup]0;+\infty[$$

$$(a): \Leftrightarrow x^3+2=2x^2+x \Leftrightarrow x^3+2-2x^2-x=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \ \ ou \ \ x=-1 \ \ ou \ \ x=2$$

$1;-1$ et $2 \in \left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup]0;+\infty[$ alors $\boxed{S=\{-1;1;2\}}$

- $\boxed{(b): \ln(|x|^3+2)=\ln(2x^2+|x|)}$

L'équation est bien définie sur IR car pour tout x dans IR $|x|^3+2>0$ et $2x^2+|x|>0$;

On pose : $X=|x|$ on obtient :

$$(b): \ln\left(|x|^3+2\right)=\ln\left(2x^2+|x|\right) \Leftrightarrow \ln\left(X^3+2\right)=\ln\left(2X^2+X\right)$$

$$\Leftrightarrow X^3+2=2X^2+X$$

$$\Leftrightarrow X^3-2X^2-X+2=0$$

D'après la question précédente on a : $X=\pm1$ et $X=2$ or $X=|x|\geq 0$ d'où :

$\boxed{S=\{-2;-1;1;2\}}$

■ $\boxed{(c): \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln\left(x^2-2x+1\right)}$ Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation

Pour cela on pose : $f(x)=x^3-x^2-3x+3$ et $g(x)=x^2-2x+1$ on peut facilement factoriser f en remarquant que : $f(1)=0$ d'où : $f(x)=(x-1)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$ et on obtient le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Et $g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ on a : $g(x)>0$ pour $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Donc $D_{ét}=\left(]-\sqrt{3};1[\cup]\sqrt{3};+\infty[\right)\cap\left(]-\infty;1[\cup]1;+\infty[\right)$

$$=]-\sqrt{3};1[\cup]\sqrt{3};+\infty[$$

$$(c): \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln\left(x^2-2x+1\right) \Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$$

D'après ce qui précède $x=-1$; $x=1$ ou $x=2$ or $1 \notin \left]-\sqrt{3};1\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$ donc :

$\boxed{S=\{-1;2\}}$

■ $\boxed{(d): \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=2\ln(x-1)}$

Comme précédemment on obtient : $D_{ét}=\left]-\sqrt{3};1\right[$

$(d): \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=2\ln(x-1)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$$

D'après ce qui précède $x=-1$; $x=1$ ou $x=2$ or $1 \notin \left]-\sqrt{3};1\right[$ et $2 \notin \left]-\sqrt{3};1\right[$ donc :

$\boxed{S=\{-1\}}$

Exercice n°6.

1) $\boxed{\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}}$ x et y sont solution du système 1) ssi $x>0$ et $y>0$;et on résout le système par substitution

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x+\ln y=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x+\ln\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln\left[x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]=\ln 1 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ x^2-\dfrac{3}{2}x-1=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ x^2-\dfrac{3}{2}x-1=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \quad ou \quad x=2 & L_2 \end{cases}$$

Or $x>0$ Donc : $\boxed{S=\left\{\left(2;\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$

2) $\boxed{\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}}$ x et y sont solutions du système 2) ssi $x>0$ et $y>0$

On pose par changements de variables $X=\ln x$ et $Y=\ln y$ on obtient :

$$\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5X+2Y=26 \\ 2X-3Y=-1 \end{cases}$$ comme le discriminant de ce système est différent de 0 :alors le système admet une unique solution

$X=4\Leftrightarrow \ln x=4\Leftrightarrow x=e^4$ et $Y=3\Leftrightarrow \ln y=3\Leftrightarrow y=e^3$

Donc : $\boxed{S=\left\{\left(e^4;e^3\right)\right\}}$

3) $\boxed{\begin{cases} \ln xy=5 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}}$ x et y sont solutions du système 3) ssi $x>0$ et $y>0$

$\ln xy=\ln x+\ln y$

On pose par changements de variables $X=\ln x$ et $Y=\ln y$ on obtient :

$$\begin{cases} \ln xy=5 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x+\ln y=5 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=5 \\ XY=-12 \end{cases}$$

Donc X et Y sont solution de l'équation : $X^2-4X-12=0$ d'où : $X_1=-2$ et $X_2=6$

Et comme X et Y jouent des rôles symétriques alors les solutions sont :$(-2;6)$ *ou* $(6;-2)$

d'où : $x=e^{-2}$ *et* $y=e^6$ ou $x=e^6$ *et* $y=e^{-2}$ donc : $\boxed{S=\left\{\left(e^{-2};e^6\right),\left(e^6;e^{-2}\right)\right\}}$

Exercice n°7.

1) $\boxed{\ln(2+5x) \le \ln(x+6)}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+5x>0 \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{2}{5} \\ x>-6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-6;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

$$\ln(2+5x) \le \ln(x+6) \Leftrightarrow 2+5x \le x+6$$
$$\Leftrightarrow x \le 1$$

donc : $\boxed{S = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-\infty;1\right[} = \left]-\frac{2}{5};1\right[$

2) $\boxed{\ln(x-1)+\ln(x-3) < \ln 3}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]1;+\infty\right[\cap \left]3;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]3;+\infty\right[$

$$\ln(x-1)+\ln(x-3) < \ln 3 \Leftrightarrow \ln\left[(x-3)(x-1)\right] < \ln 3$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) < 3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+\cancel{3} < \cancel{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x < 0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)x < 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \left]0;4\right[$$

donc : $\boxed{S = \left]3;+\infty\right[\cap \left]0;4\right[} = \left]3;4\right[$

3) $\boxed{\ln x \ge 2}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x \in \left]0;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]0;+\infty\right[$

$$\ln x \ge 2 \Leftrightarrow \ln x \ge 2 \times \ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln x \ge \ln e^2$$
$$\Leftrightarrow x \ge e^2$$

Comme $S = \left]0;+\infty\right[\cap \left[e^2;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S = \left[e^2;+\infty\right[}$.

4) $\boxed{\frac{2(1+\ln x)}{x} > 0}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]0;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]0;+\infty\right[$

$$\frac{2(1+\ln x)}{x} > 0 \Leftrightarrow 1+\ln x > 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x > -1$$
$$\Leftrightarrow \ln x > -\ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

Donc $S = \left]\frac{1}{e};+\infty\right[\cap \left]0;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S = \left]\frac{1}{e};+\infty\right[}$.

5) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0$

$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0;+\infty\right[$ Donc : $D_{Et} = \left]0;+\infty\right[$

On pose $X = \ln x$ on obtient : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 \leq 0$

Que l'on sait résoudre on a comme solutions : $X = 2$ et $X = -3$

$$(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq 2 \\ \ln x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq e^2 \\ x \geq e^{-3} \end{cases}$$ Donc : $\boxed{S = \left[e^{-3};e^2\right]}$

6) $\boxed{\ln(2x-5) \geq 1}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow 2x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$$\ln(2x-5) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(2x-5) \geq \ln e$$
$$\Leftrightarrow 2x-5 \geq e$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{e+5}{2}$$

Donc $S = \left[\frac{e+5}{2};+\infty\right[\cap \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ alors : $\boxed{S = \left[\frac{e+5}{2};+\infty\right[}$

7) $\boxed{(1,2)^n \geq 4 \quad (n \in IN)}$

$(1,2)^n \geq 4 \Leftrightarrow \ln(1,2)^n \geq \ln 4$ (La fonction $\ln$ est continue strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$)

$$\Leftrightarrow n\ln(1,2) \geq \ln 4$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 4}{\ln(1,2)} \simeq 7.61 \quad (Car\ \ln(1,2)\ est\ positif)$$

Alors : $\boxed{n \geq 8}$

8) $\boxed{(0,8)^n \leq 0,1 \quad (n \in IN)}$

$(0,8)^n \leq 0,1 \quad \Leftrightarrow \ln(0,8)^n \leq \ln(0,1)$

(La fonction $\ln$ est continue strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$)

$$\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leq \ln(0,1)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)} \simeq 10.31 \quad (Car\ \ln(0,8)\ est\ négatif)$$

Alors : $\boxed{n \geq 11}$

Exercice n°8.

- $A(x) = \ln x(\ln x + 1)$ On étudiera le signe $A(x)$ sur $D_A = \left]0;+\infty\right[$

Tableau de signe de $A(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

■ $B(x)=2x\ln(1-x)$ On étudiera le signe $B(x)$ sur $D_B=]-\infty;1[$

Tableau de signe de $B(x)$

x	$-\infty$		0		1
$2x$		$-$	0	$+$	$\Vert$
$\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$B(x)$		$-$	0	$-$	$\Vert$

■ $C(x)=-x^2\ln(x+1)$ On étudiera le signe $C(x)$ sur $D_C=]-1;+\infty[$

Tableau de signe de $C(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$	0	$-$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice n°9.

1) $f(x)=\ln(x^2+3x-4)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+3x-4>0$ en cherchant les racines du polynôme $P(x)=x^2+3x-4$ on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $\boxed{D_f=]-\infty;-4[\cup]1;+\infty[}$

2) $f(x)=\ln\left(\frac{4-x^2}{x}\right)$

Etudions le signe de $\frac{4-x^2}{x}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{4-x^2}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'où : $\boxed{D_f=]-\infty;-2[\cup]0;2[}$

3) $f(x)=\ln(4-x^2)-\ln x$

$x\in D_f \Leftrightarrow 4-x^2>0$ *et* $x>0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x							$+$		
$4-x^2$		$-$	0	$+$		0		$-$	

D'où : $\boxed{D_f =]0;2[}$

4) $f(x) = \ln(x^2-4) - \ln(-x)$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \; et \; x < 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$							
x^2-4		$+$	0	$-$		0		$+$	

D'où : $\boxed{D_f =]-\infty;-2[}$

Exercice n°10.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\ln x) = +\infty$ Par somme des deux limites $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2 - 3\ln x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2 = +\infty$ On pose $t = x^2$ et on utilise $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}((1-x)\ln x) = -\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ par produit on obtient $-\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-4+\ln x) = -\infty$

On a $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=F.I\,(+\infty\times 0)$

On pose : $X=\frac{1}{x}$ $x\mapsto+\infty$ alors $X\mapsto 0^+$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{X\to0^+}\left(\frac{1}{X}\ln(1+X)\right)$$

$$=\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

d'où : $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=$

8) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=F.I\left("\frac{0}{0}"\right)$

On pose : $X=2x$ $x\mapsto 0$ alors $X\mapsto 0$ donc :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=\lim_{X\to0}\left(2\times\frac{\ln(1+X)}{X}\right)$$

$$=\lim_{X\to0}\left(2\times\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=2$$

car $\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$

Exercice n°11.

1) La fonction définie par $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui sont définies et dérivables sur le même intervalle et : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{x}=\frac{4-x}{2x}}$

2) La fonction définie par $f(x)=\frac{2\ln x}{\ln 3}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de la fonction $x\mapsto\ln x$ par le réel $\frac{2}{\ln 3}$ et on a : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=\frac{2}{x\ln 3}}$

3) La fonction définie par $f(x)=\ln(4-x)+\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[\cap]-\infty;4[=]0;4[$ et on a :

$$(\forall x\in]0;4[)\qquad f'(x)=\frac{-1}{4-x}+\frac{1}{x}=\frac{-x+4-x}{x(4-x)}$$

Donc : $\boxed{(\forall x\in]0;4[)\qquad f'(x)=\frac{2(2-x)}{x(4-x)}}$

4) La fonction définie par $f(x)=x\ln x-x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonction usuelles et qui sont définies et dérivables sur $]0;+\infty[$,et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=\ln x+\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}-\cancel{1}$ donc : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=\ln x}$

5) La fonction définie par $f(x)=x^2\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions qui sont définies et dérivables sur $]0;+\infty[$,et on a :

$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}$ donc : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\qquad f'(x)=x(2\ln x+1)}$

6) La fonction définie par $f(x)=\ln(2x-5)$ est définie et dérivable sur $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ (car $X\mapsto \ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $2x-5>0 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$) et $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=2x-5 \Rightarrow u'(x)=2$

On obtient : $\boxed{\left(\forall x\in\left]\frac{2}{5};+\infty\right[\right) \quad f'(x)=\frac{2}{2x-5}}$

7) La fonction définie par $f(x)=\ln(-3x+1)$ est définie et dérivable sur $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ (car $X\mapsto \ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $-3x+1>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$) et $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=-3x+1 \Rightarrow u'(x)=-3$

On obtient : $\boxed{\left(\forall x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\right) \quad f'(x)=\frac{-3}{-3x+1}}$

8) La fonction définie par $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $x^2+x+1>0$. Si on note $P(x)=x^2+x+1$, le calcul de son discriminant fournit $\Delta=-3$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(u(x))$

avec $u(x)=x^2+x+1 \Rightarrow u'(x)=2x+1$. Ainsi $\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x+1}{x^2+x+1}}$

9) La fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\frac{x-1}{x+1}>0$

Si on note $P(x)=\frac{x-1}{x+1}$, le tableau de signes de P est donné par :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)=\frac{x-1}{x+1}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Ainsi, f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ Puisque P est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, puisque pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ $\frac{x-1}{x+1}>0$ et puisque $X\to\ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on conclut que f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\ln(P(x))$, on aura $f'(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}$. Puisque $P(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=x-1$ et $v(x)=x+1$,on aura $f'(x)=\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}$

10) La fonction définie par $f(x)=\ln(\ln x)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\ln x>0$ c'est-à-dire $D_f=]1;+\infty[$

Pour tout $x\in]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\ln(u(x))$ où $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$ on obtient :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

11) La fonction définie par $f(x)=x\ln(2x-3)$ est définie et dérivable sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ en tant que produit de fonctions qui le sont (car $X\to\ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $2x-3>0\Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ Puisque pour tout $x\in\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$; $f(x)=u(x)v(x)$ où $u(x)=x$ et $v(x)=\ln(2x-3)$, on en déduit ;

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$=\ln(2x-3)+x\times\frac{2}{2x-3}$$

$$=\ln(2x-3)+\frac{2x}{2x-3}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{(2x-3)\ln(2x-3)+2x}{2x-3}}$

12) La fonction définie par $f(x)=2x(1-\ln x)$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$ $f(x)=u(x)v(x)$ où $u(x)=2x$ et $v(x)=1-\ln(x)$, on en déduit : $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$=2\times(1-\ln(x))+2x\times\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\cancel{2}-2\ln(x)-\cancel{2}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=-2\ln x}$

13) La fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. Puisque

pour tout $x\in]0;+\infty[$ $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x$, on en déduit :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x} - 1 \times \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}}$

14) La fonction définie par $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions

qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0;+\infty[$ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = x - \ln x$ et $v(x) = x^2$,

on en déduit : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \times x^2 - (x - \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2x^2 + 2x \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 - x + 2x \ln x}{x^4}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \frac{2 \ln x - x - 1}{x^3}}$

15) La fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 4$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{2-1} - 2 \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}}$

16) La fonction définie par $f(x) = \ln x^2$ est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0:+\infty[$.

En effet $x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, tandis que $X \to \ln(X)$ n'est définie et dérivable que sur $]0;+\infty[$ .Or : $x^2 \in]0:+\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty;0[\cup]0:+\infty[$ Pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0:+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{2x}{x^2}$ Donc : $\boxed{(\forall x \in]-\infty;0[\cup]0:+\infty[\ ) \quad f'(x) = \frac{2}{x}}$

17) La fonction définie par $f(x)=(\ln x)^2$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. En effet $x\to\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, tandis que $X\to X^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in]0;+\infty[$

$f'(x)=2\times\frac{1}{x}(\ln x)^{2-1}$ Donc : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\qquad f'(x)=\frac{2\ln x}{x}}$

18) La fonction définie par $f(x)=\ln\left|1-x^2\right|$ est définie et dérivable pour toutes les valeurs de x telles que : $1-x^2\neq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

Selon la valeur de x, l'expression de $f(x)$ n'est pas la même. Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $1-x^2<0$ donc $\left|1-x^2\right|=x^2-1$ et par suite $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ alors :

$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ Pour tout $x\in]-1;1[$, $1-x^2>0$ donc $\left|1-x^2\right|=1-x^2$ et par suite

$f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$ alors : $f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}=\frac{2x}{x^2-1}$

Donc Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$: $\boxed{f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}}$

Exercice n°12.

$$f(x)=\ln(ax+b)$$

1) $f(2)=0$ se traduit par l'équation $\ln(2a+b)=0\Leftrightarrow 2a+b=1$

De plus $f'(x)=\frac{a}{ax+b}$ donc $f'(3)=\frac{3}{4}$ se traduit par

$\frac{a}{3a+b}=3\Leftrightarrow 4a=3(3a+b)\Leftrightarrow 5a+3b=0$

On doit résoudre le système : $\begin{cases}5a+3b=0\\2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-5\end{cases}$

Ainsi, $\boxed{f(x)=\ln(3x-5)}$, qui est définie si et seulement si $3x-5>0 \Leftrightarrow x\in \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$.

Ainsi $D_f = \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$

La fonction f est la composée de deux fonctions strictement croissantes donc est strictement croissante sur $\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$

2) La courbe C passe par le point $A(2;0)$ donc

$$f(2)=0 \Leftrightarrow \ln(ax+b)=0$$
$$\Leftrightarrow 2a+b=1$$

La tangente en A a pour coefficient directeur -2 donc $f'(2)=-2$, c'est-à-dire :

$$\frac{a}{2a+b}=-2 \Leftrightarrow a=-2(2a+b)$$
$$\Leftrightarrow 5a+2b=0$$

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 5a+2b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$

Ainsi $\boxed{f(x)=\ln(-2x+5)}$

Exercice n°13

Partie I

$(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g(x)=x^2-2\ln x$

1) g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$ $g'(x)=2x-2\times\frac{1}{x}$

$$=\frac{2x^2-2}{x}$$
$$=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

le signe de $g'(x)$ sera donné par le signe de $(x-1)(x+1)$, expression dont les racines sont −1 et 1.

Ainsi, pour $x\in]0;1[$, $g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur $]0\,;1[$ et pour tout $x\in]1;+\infty[$, $g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

2) Sur $]0;+\infty[$; g atteint donc son minimum lorsque $x=1$,et comme $g(1)=1^2-2\times\underbrace{\ln 1}_{=0}=1$ on peut affirmer que pour tout $x\in]0;+\infty[$; $\boxed{g(x)>0}$

Partie II

1) Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, on en déduit par quotient et somme, que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$.

La droite d'équation $x=0$ (c'est à dire l'axe de ordonnées) est donc asymptote verticale à la courbe (C).

2) On transforme l'écriture de $f(x)$: Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$

En utilisant $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (la limite de croissance comparée) ; puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$; on déduit par somme que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

De plus pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ $f(x)-\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

on a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)=0}$

<u>Interprétation géométrique</u> :

La droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$. Pour connaître la position relative de (C) et (Δ) on étudie le signe de la différence $f(x)-\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\ln x}{x}$; on a :

$f(x)-\dfrac{x}{2}=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow x=e^{-1}$

Donc $f(x)-\dfrac{x}{2}>0\Leftrightarrow x\in\left[e^{-1};+\infty\right[$

Et $f(x)-\dfrac{x}{2}<0\Leftrightarrow x\in\left]0;e^{-1}\right]$

Ainsi (C) et (Δ) sont sécantes au point A d'abscisse e^{-1} et d'ordonnée $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{2e}$

De plus ,sur $\left]0;e^{-1}\right]$ la courbe (C) est au- dessous de (Δ) , et sur $\left[e^{-1};+\infty\right[$ la courbe (C) est au-dessus de (Δ)

3) f est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2}+\frac{x\times\frac{1}{x}-(1+\ln x)\times 1}{x^2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x^2}\\&=\frac{1}{2x^2}\left(x^2-2\ln x\right)\\&=\frac{1}{2x^2}g(x)\end{aligned}$$

On considère la fonction numérique g définie sur par : $g(x)=x^2-2\ln x$

Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$; $\frac{1}{2x^2}>0$ et $g(x)>0$ (question 2 **partie I**),on conclue que pour tout $x\in]0;+\infty[$; $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4) La droite (Δ) a un coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$. Le coefficient directeur de la tangente (T) en un point d'abscisse a est égal à $f'(a)=\frac{1}{2}-\frac{\ln a}{a^2}$

La tangente (T) sera parallèle à (Δ) si et seulement si ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et seulement si $f'(a)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln a}{a^2}=0\Leftrightarrow a=1$

C'est donc au point B d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1)=\frac{3}{2}$ que la tangente (T) sera parallèle à (Δ).

5) Sur $]0;+\infty[$, f est continue en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont. De plus elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Enfin, puisque $f\left(]0;+\infty[\right)=]-\infty;+\infty[$ Et $0\in]-\infty;+\infty[$

Alors d'après Le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$.

Par définition, $f(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}+\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}=0\Leftrightarrow\boxed{\ln\alpha=-\frac{\alpha^2}{2}-1}$

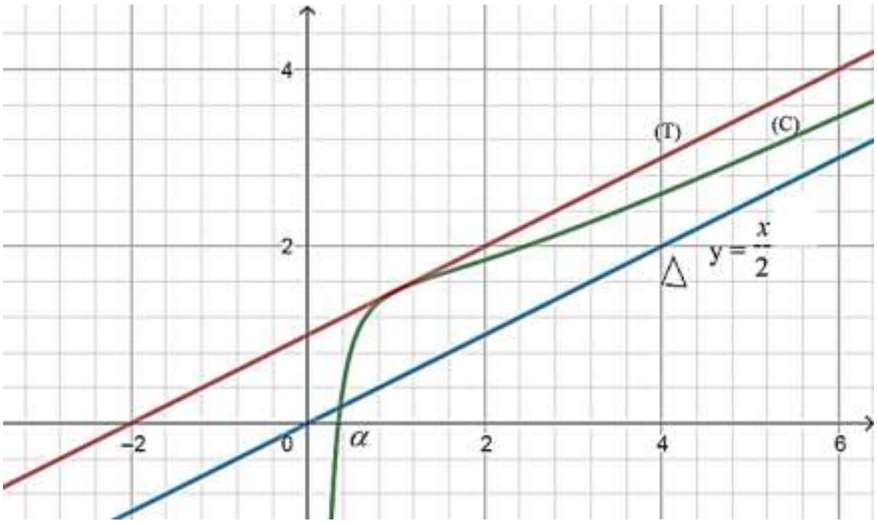
Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est égal à :

$$f'(\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}-\frac{-\frac{\alpha^2}{2}-1}{\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2}=1+\frac{1}{\alpha^2}>1$$

Ce coefficient est donc supérieur à 1

<u>Construction de (C) ;(T) et (Δ)</u>



-

Exercice n°14.

<u>**Partie I**</u>

$$f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$$

<u>**Partie I**</u>

1) f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$

$$=1+\frac{1}{2x}$$

Mais comme $x\in]0;+\infty[$ on a $\frac{1}{2x}>0\Leftrightarrow f'(x)>0$

Donc f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus :

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty}$

On a pour tout $x\in]0;+\infty[$; $f(x)=x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}\right)$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$)

Tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ f est continue et strictement croissante. De plus elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Enfin, puisque $f\left(]0;+\infty[\right)=]-\infty;+\infty[$

Et $0\in]-\infty;+\infty[$

Alors d'après Le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ solution de l'équation $f(x)=0$.

On a $f(1)=-1<0$ et $f(2)=\frac{1}{2}\ln 2>0$

D'où : $1<\alpha<2$

3) Puisque f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$,

- pour tout $]0;\alpha]$ $\quad f(x)\le f(\alpha)$ et $f(\alpha)=0$ donc $f(x)\le 0$
- pour tout $[\alpha;+\infty[$ $\quad f(x)\ge f(\alpha)$ et $f(\alpha)=0$ donc $f(x)\ge 0$

Partie II

1) On $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0=g(0)$ donc que g est continue en 0. Pour tout $x\in]0;+\infty[$ $g(x)=x^2\left(-\frac{7}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln x\right)$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{7}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty}$.

2) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont, et

pour tout $x>0$: $g'(x)=\left(-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)'$

$$=\left(-\frac{7}{8}\times 2x+1-\frac{1}{4}\times 2x\ln x-\frac{1}{4}x^2\times\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x$$

$$=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$$

Et on : $xf\left(\frac{1}{x}\right)=x\times\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$$

On a bien l'égalité : $\boxed{g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)}$

3) On calcule $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$$= -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}\ln\alpha$$

Or on a : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha \Leftrightarrow \ln\alpha = 2(2-\alpha)$

En remplaçant $\ln\alpha$ dans l'expression de $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ par $2(2-\alpha)$ on obtient :

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}\times 2(2-\alpha)$$

$$= \frac{-7 + 8\alpha + 4(2-\alpha)}{8\alpha^2}$$

$$= \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$$

Donc : $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$

Pour tout $x > 0$, $g'(x)$ a le même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$ on a donc :

■ Si $x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$,on a $\frac{1}{x} > \alpha$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha) = 0$ d'où $g'(x) > 0$

Alors g est croissante sur $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$

■ Si $x \in \left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$,on a : $\frac{1}{x} < \alpha$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) < f(\alpha) = 0$ d'où $g'(x) < 0$

Alors g est décroissante sur $\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$

En fin on a $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$; $f(\alpha) = 0$

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^{é}}$	$\searrow$	$-\infty$

4) Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse 1 est $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ or $g'(1)=1\times f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)=-1$ et $g(1)=\frac{1}{8}$

Ainsi $y=-(x-1)+\frac{1}{8}$

Donc : $\boxed{y=-x+\frac{9}{8}}$

Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse α est $y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$ or $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ et $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$

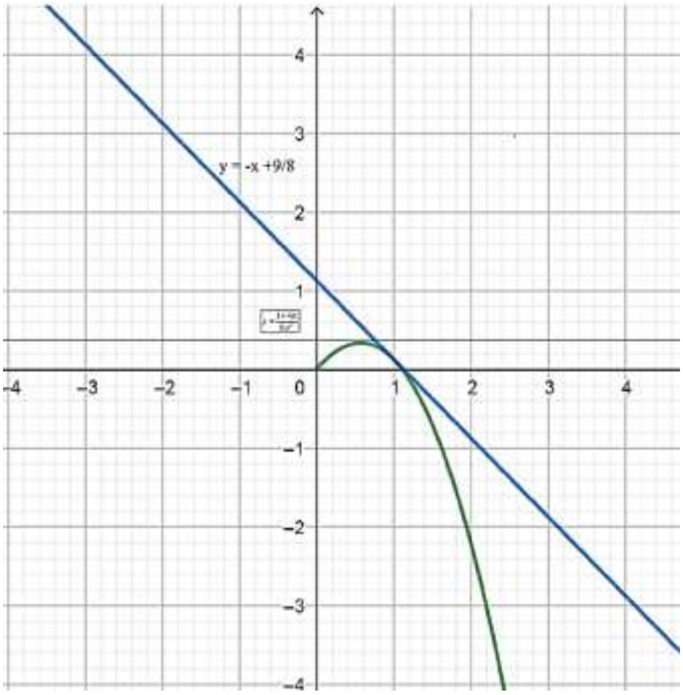
Ainsi $y=-(x-1)+\frac{1}{8}$

Donc : $\boxed{y=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}}$

En reprenant l'écriture $g'(x)=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$; on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=1$

Graphiquement, cela signifie que Γ admet en O une demi-tangente parallèle à la première bissectrice.

5) Construction de Γ



Exercice n°15

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$

f est continue sur $I=\left]0;+\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $I=\left]0;+\infty\right[$, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$,

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+\ln|x|$$
$$=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+\ln x$$

(on a : $\ln|x|=\ln x$ car $x\in\left]0;+\infty\right[$)

Donc : $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+\ln x}$ sur $I=\left]0;+\infty\right[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ sur $I=\left]0;+\infty\right[$

f est continue sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]0;+\infty\right[$, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$,

puisque : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$

$=x+1+\frac{1}{x}$ et $x\in\left]0;+\infty\right[$

alors : $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\ln x}$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ sur $I=\left]0;+\infty\right[$

f est continue sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\left]0;+\infty\right[$, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$

$$F(x)=7\ln|x|+5\times2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$$
$$=7\ln x+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}$$

alors : $\boxed{F(x)=7\ln x+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur $I=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

.f est continue sur $I=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $I=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$, et pour tout $x\in\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ et puisque : $f(x)=\frac{3}{3x-4}=\frac{(3x-4)'}{3x-4}$ sous la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$

D'où : $F(x)=\ln|3x-4|$ or $x\in\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ donc $3x-4>0$ alors : $\boxed{F(x)=\ln(3x-4)}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $I=]-1;+\infty[$

f est continue sur $]-1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;+\infty[$, et puisque

$$f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)'}{x+1} \text{ sous la forme } \frac{u'(x)}{u(x)}$$

D'où : $F(x)=\ln|x+1|$; or $x\in]-1;+\infty[$ donc $x+1>0$ alors : $\boxed{F(x)=\ln(x+1)}$

6) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $I=]-\infty;-1[$

$F(x)=\ln|x+1|$ or $x\in]-\infty;-1[$ donc $x+1<0$ alors : $\boxed{F(x)=\ln(-x-1)}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$ sur $I=[2;+\infty[$

f est continue sur $I=[2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur I, donc admet des primitives sur $[2;+\infty[$, et puisque

$$f(x)=\frac{1}{3x-5}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{3x-5}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{(3x-5)'}{3x-5}$$

sous la forme $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

D'où : $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln|3x-5|$ or $x\in[2;+\infty[$ donc $3x-5>0$ alors : $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{3}\ln(3x-5)}$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur IR

f est continue sur IR en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur I car le polynôme x^2+2x+2 a un discriminant négatif $(\Delta=-4)$, donc admet des primitives sur IR, et puisque $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2}$$

sous la forme $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

D'où : $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|$ or $(\forall x\in IR)$; $x^2+2x+2>0$ alors :

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)}$$

Exercice n°16

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x-2}$$

1) Pour tout $x\in[4;+\infty[$

$$ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(x-2)\times ax+(x-2)\times b+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$$

Ainsi $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b-2a=-3\\ c-2b=-4\end{cases}$

On obtient donc $\boxed{f(x)=2x+1-\dfrac{2}{x-2}}$

2) f est définie et continue sur $[4;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4;+\infty[$

A partir de l'écriture

FONCTION LOGRITHME EXERCICES NON CORRIGES

Exercice n°1.

Partie I

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1) Etudier le sens de variations de f. Calculer les limites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $\alpha\in]n;n+1[$

3) Déterminer le signe de $f(x)$

Partie II

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x=0\\ -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & si\ \ x>0\end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$

2) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Montrer que : $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$. Dresser le tableau de variation de g.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{\alpha}$.

Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice n°2.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ sur $I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur $I=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur $I=]-1;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur $I=]-\infty;-1[$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ sur $I=]2;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$ sur $I=[2;+\infty[$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur IR

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $I=]-1;1[$

Exercice n°3.

On considère la fonction définie sur $I=[4;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$

1) Trouver trois réels a,b, et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

2) En déduire une primitive de f sur $I=[4;+\infty[$

Exercice n°4.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=[1;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $I=]1;+\infty[$

4) $f(x)=\tan x$ sur $I=\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$

Exercice n°5.

Calculez les intégrales

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$ 2) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx$ 3) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{4}{1-5x}dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx$ 5) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx$

6) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ 7) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx$

Exercice n°6.

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$

1) Montrez que pour tout x de $]1;+\infty[$; $f(x)=x+4+\dfrac{3}{x-1}$

2) Calculez $\int_4^2 \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}dx$

Exercice n°7.

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{-2}{3};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{6x^2+13x+4}{3x+2}$

1) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que pour tout x de $\left]\dfrac{-2}{3};+\infty\right[$:

$f(x)=ax+b-\dfrac{c}{3x+2}$

2) Calculez $\int_0^2 \dfrac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$

Exercice n°8.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln x-x$

1) Déterminez la fonction dérivée g' de g

2) Calculez $\int_1^e \ln x\, dx$

Exercice n°9.

Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties : $I=\int_1^e x\ln x\, dx$

Exercice n°10.

On considère l'application f_n définie pour tout t de IR_+^* par : $f_n(t)=\dfrac{1}{t\left(t^n+1\right)}$ où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel t strictement positif :

$f_n(t)=\dfrac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\dfrac{c}{t}$

2) Montrer que : $\int_1^2 f_n(t)\, dt=\ln\left(\sqrt[n]{\dfrac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_1^2 \dfrac{t^{n-1}.\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}\, dt$

Exercice n°11.

On considère la suite (U_n) de réels strictement positifs, définie par : $U_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n)$

1) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et préciser la nature de la suite (U_n) .
2) Déterminer la monotonie de la suite (U_n) , et préciser sa limite.
3) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n.
4) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} \ln(U_k)$ en fonction de n. En déduire le calcul de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ en fonction de n.

Exercice n°12.

Soit la fonction f définie sur IR_+^* par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) Donner la dérivée de f.
2) Donner le sens de variation de f.
3) Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
4) Donner une primitive de f sur IR_+^*.
5) Quel est le sens de variation de la fonction G définie sur IR_+^* par : $\int_1^x f(t)dt$

Exercice n°13.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) & si \ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. f est-elle dérivable en 0 ?
2) Etudier le sens de variations de f.
3) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[e;+\infty[$
4) Soit T la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 1.
Déterminer l'équation de T.
5) Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite T dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
6) Soit $\lambda \in]0;e]$. On pose : $I(\lambda) = \int_\lambda^e f(x)dx$

a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0;e]$

b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

c) En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$

Exercice n°14.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

1. Déterminer D et calculer les limites de f aux bornes de D.
2. Montrer que C admet la droite Δ d'équation : $y=\dfrac{x}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
3. Etudier la position relative de la courbe C et la droite Δ .
4. a) Vérifier que pour tout x de D on a : $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x(\ln x)^2}$

   b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation sur D.

Fonction exponentielle

A) Définition et premières conséquences.

Théorème et définition

La fonction logarithme étant continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$; alors elle admet une fonction réciproque définie et f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(x)=\ln x$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée exp : $x \mapsto e^x$.

Conséquences

- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $(e^x)'=e^x$ $\quad (exp'(x)=exp(x))$.
- $exp(0)=1$.
- Pour tout réel x, $e^x>0$.

B) Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle caractéristique

Pour tous réels a et b, $e^{a+b}=e^a\times e^b$

Conséquences

Pour tous réels a et b, et tout entier relatif n,

- $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$
- $e^{na}=(e^a)^n$

C) Nombre e.

- Le nombre exp(1) est noté e et on a : $e\approx 2,72$

D) Variations et courbe de la fonction $x\mapsto e^x$.

1- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.

2- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)'=e^x$

Or $e^x>0$ pour tout réel x donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

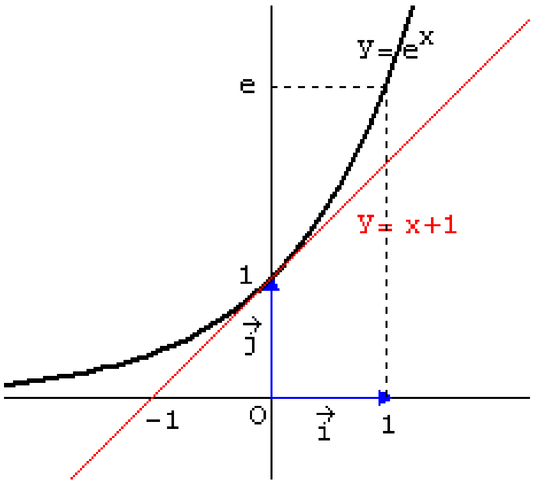
3- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

4- Tableau de Variations de la fonction Exp

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x		+		
e^x	0	1	e	$+\infty$

5- Courbe représentative (C)

- l'axe des abscisses est asymptote à (C) en $-\infty$.



- La fonction $x \mapsto x+1$ est la meilleure approximation affine de la fonction exp au voisinage de 0.

F) Equations et inéquations.

- La fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

pour tous réels a et b :
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

G) Des limites à connaître.

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$$

H) Croissances comparées des fonctions exponentielle et puissance.

Théorème

Pour tout entier strictement positif n, $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

« à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x »

I) Fonction composée exp $\circ$ u.

Dérivée de $\exp \circ u$

Théorème :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée

$x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pur tout $x \in I$: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

Primitive de $u' e^{u}$

Théorème : si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors

une primitive de $u' e^{u}$ sur I est e^{u}

FONCTION EXPONENTIELLE EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x+e^{-x}$

1. Justifier que C_f passe par le point A de coordonnées $(0;1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f. On précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

CORRECTION EXERCICE 1

1. $f(0)=0+e^{0}=1$

Donc la courbe C_f passe par le point A de coordonnées $(0;1)$.

f est définie et dérivable sur IR et : $f'(x)=1-e^{-x}$

$$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-e^{-x}\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}\leqslant 1$$
$$\Leftrightarrow -x\leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x\geqslant 0$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Pour la limite en $-\infty$ on a une forme indéterminée du type «$+\infty-\infty$». On peut lever cette indétermination en mettant x en facteur :

$$f(x)=x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

En posant $X=-x$ on voit que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{e^{X}}{X}=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=-\infty$ et par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=+\infty$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

EXERCICE 2

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=e^{x}$ et $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x)=x\left(\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{2}{x}\right)$

En déduire la limite de la fonction h en$+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur IR.

Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de xx.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur IR.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}}-1\geqslant x+1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes C_f et C_g Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$

Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g .

CORRECTION EXERCICE 2

Soient $f(x)=e^x$ et $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$ deux fonctions définies sur IR.

1) On voit aisément que $f(0)=g(0)=1$, ce qui implique que les courbes représentatives C_f et C_g de f et g ont un point commun d'abscisse 0 et d'ordonnée 1. Le coefficient directeur des tangentes en ce point à C_f et C_g est donnée, respectivement, par les valeurs de $f'(0)$ et$g'(0)$. on a : $f'(x)=e^x$ d'où $f'(0)=1$ et $g'(x)=e^{\frac{x}{2}}$ d'où$g'(0)=1$. Donc les tangentes en $(0;1)$ à C_f et C_g ayant même coefficient directeur elles sont confondues en une seule droite Δ dont on détermine facilement l'équation :$y=x+1$.

2) Soit $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$ définie sur IR.

a) En observant que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2}}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

b) On peut écrire $h(x)=x\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\dfrac{2}{x}\right)$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

c) On calcule la dérivée de h : $h'(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$. La fonction $x\mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est croissante sur IR et l'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$. On a $h'(0)=0$ et donc : $h'(x)<0$ pour $x<0$ et $h'(x)>0$ pour $x>0$

d) En remarquant que $h(0)=0$, on peut dresser le tableau de variation de h sur IR:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) D'après le tableau ci-dessus, on voit que $h(x)\geq 0$ pour tout $x\in IR$. C'est à dire $2e^{\frac{x}{2}}-x-2\geq 0$ d'où l'on tire : $2e^{\frac{x}{2}}-1\geq x+1$.

f) On en déduit que Δ est au -dessous de C_g sauf pour $x=0$ où elle est tangente à C_g.

3. a) $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2=e^x-2e^{\frac{x}{2}}+1$

b) On remarque que $f(x)-g(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}+1$. De plus, étant un carré qui s'annule pour $x=0$, alors $f(x)-g(x)\geq 0$ sur IR. D'où l'on déduit que : $f(x)\geq g(x)$ pour tout $x\in IR$, et C_f est au -dessus de C_g sauf pour $x=0$ où les deux courbes sont tangentes.

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=e^{x}-x$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f.
2. En déduire que pour tout réel x : $e^{x}>x$.

   Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

3. A l'aide de la question précédente, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

PARTIE B

Soit la fonction g définie sur IR par :$g(x)=e^{x}-\dfrac{x^{2}}{2}$

1. Etudier le sens de variation de la fonction g.

   Montrer que $g(x)>0$ pour tout $x>0$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

CORRECTION EXERCICE 3

PARTIE A

1. $f'(x)=e^{x}-1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>1$

$\Leftrightarrow e^{x}>e^{0} \Leftrightarrow x>0$

car le fonction exponentielle est strictement croissante.

Par ailleurs $f(0)=e^{0}-0=1$.

On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Le tableau précédent montre que pour tout $x\in IR$, $f(x)>0$, c'est à dire $e^{x}>x$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ Donc d'après le <u>théorème de comparaison</u> pour les limites infinies $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

2. On pose $X=-x$. Lorsque $x\to-\infty$, $X\to+\infty$ et : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}$

Or d'après la question précédente $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$

En conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

PARTIE B

1. $g'(x)=e^x-x=f(x)>0$ pour tout $x\in IR$.
Donc la fonction g est croissante sur IR
On en déduit que pour $x>0$, $g(x)>g(0)=1>0$

Pour x strictement positif $g(x)>0$ càd $e^x-\frac{x^2}{2}>0$ donc $e^x>\frac{x^2}{2}$

Par conséquent : $\frac{e^x}{x}>\frac{x}{2}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$, d'après le <u>théorème de comparaison</u> pour les limites infinies : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

On pose, là encore $X=-x$: Lorsque $x\to-\infty$, $X\to+\infty$ et :

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-Xe^{-X}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\frac{-X}{e^X}\right)$

Or d'après la question précédente

$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

En conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

EXERCICE 4

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur IR par : $f(x)=\frac{4}{e^x+1}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O. Pour tout réel x positif ou nul, on note : **M** le point de C de coordonnées $(x;f(x))$; **P** le point de coordonnées $(x;0)$ et **Q** le point de coordonnées $(0;f(x))$. Exprimer l'aire du rectangle **OPMQ** en fonction de x.

Partie B

Soit g la fonction g définie sur R par : $g(x)=e^x-xe^x+1$.

1. Etudier les variations de la fonction g.

2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans IR une seule solution α. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

d. Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de

Partie C

Soit h la fonction définie et dérivable sur IR par : $h(x)=\dfrac{4x}{e^{x}+1}$.

Démontrer que pour tout réel x, $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
En déduire les variations de la fonction h.

Partie D

1. Montrer que l'aire du rectangle **OPMQ** est maximale lorsque **M** a pour abscisse α. Déterminer un encadrement de cette aire maximale.
2. Supposons alors que **M** a pour abscisse α. La tangente T en **M** à la courbe C est-elle parallèle à la droite (PQ).

CORRECTION EXERCICE 4

Partie A

$f(x)=\dfrac{4}{e^{x}+1}$ Pour tout réel x positif ou nul, on note : **M** le point de C de coordonnées $(x;f(x))$; **P** le point de coordonnées $(x;0)$ et **Q** le point de coordonnées $(0;f(x))$.

En utilisant les coordonnées des points **O**, **P**, **M** et **Q** et sachant que le repère est orthonormé on a $OP=x$ $(x>0)$ et $OQ=f(x)=\dfrac{4}{e^{x}+1}$ 1 Ainsi l'aire du rectangle OPMQ est $OP\times OQ=\dfrac{4x}{e^{x}+1}$.

Partie B

$g(x)=e^{x}-xe^{x}+1$

1. g est une fonction dérivable sur IR comme somme et produit de fonctions dérivables sur IR.

Soit $x\in IR$, $g'(x)=e^{x}-\left(1\times e^{x}+x\times e^{x}\right)=-xe^{x}$. Puisque $e^{x}>0$ sur IR, le signe de $g'(x)$ est le signe contraire de x.

Ainsi, sur $]-\infty;0[$ $g'(x)>0$, sur $]0;+\infty[$ $g'(x)<0$ et $g'(0)=0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]-\infty;0[$ puis strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

2. a. ⊛ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$: On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$

⊛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$: On est en présence d'une forme indéterminée. Au voisinage de $+\infty$,

$g(x)=e^{x}(1-x)+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ par produit et somme on

obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

b. Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0		-		
$g(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

$g(0)=e^{0}$ - $0\ e^{0}+1=2$

■g est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$ .L'image de l'intervalle $]-\infty;0]$ par g est l'intervalle $]1;2]$.

Or, $0\notin]1;2]$. L'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty;0]$.

■g est continue sur IR car elle est dérivable sur IR. g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ L'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ par g est l'intervalle $]-\infty;2]$.

Et $0\in]-\infty;2]$. D'après TVI, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$. On en déduit que l'équation $g(x)=0$ admet exactement une solution α dans IR.

On a $g(1,27)\approx 0,03>0$ $g(\alpha)=0$ et $g(1,28)\approx -0,007<0$ donc $1,27<\alpha<1,28$

c. $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1=0$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}(1-\alpha)=-1$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$$

d. En utilisant le tableau de variation de la fonction g, on a : $g(x)>0$ pour $x\in]-\infty;\alpha[$ $g(x)=0$; $g(x)<0$ pour $x\in]\alpha;+\infty[$ et $g(\alpha)=0$.

Partie C

$h(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$. h est une fonction dérivable sur IR $(e^x+1\neq 0 \quad \forall x\in IR)$ comme quotient de fonctions dérivables.

Soit $x\in IR$: $$h'(x)=\frac{4(e^x+1)-4xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{4e^x+4-4xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{4(e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

Ainsi, $h'(x)=\dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$, $\forall x\in IR$.

Mais, $(e^x+1)^2>0$ sur IR donc $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur IR. En utilisant le signe de $g(x)$ déterminé à la question **Partie B** - 2.d., on peut dire que h est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Partie D

1. D'après la partie A -, l'aire du triangle OPMQ est $h(x)$ pour tout réel $x>0$.
En utilisant les variations de la fonction h, h admet un maximum en $\alpha\,(\alpha>0)$, c'est-à dire lorsque M a pour abscisse α. $h(\alpha)=\dfrac{4\alpha}{e^{\alpha}+1}=\dfrac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}\left(\text{car } e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}\right)$

$$=\frac{4\alpha}{\dfrac{\cancel{1}+\alpha-\cancel{1}}{\alpha-1}}$$

$$=\frac{4\alpha(\alpha-1)}{\alpha}$$

$$=4(\alpha-1)$$

Et on a : $1,27<\alpha<1,28\Rightarrow 1,08<4(\alpha-1)<1,12$

$$\Rightarrow 1{,}08 < h(\alpha) < 1{,}12$$

. Supposons alors que M a pour abscisse **α**. La tangente T en M à la courbe C est parallèle à la droite (PQ) si, et seulement si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux. Le coefficient directeur de la tangente T en M à la courbe C est $f'(\alpha)$. f est dérivable sur IR comme quotient de fonctions dérivables, et pour $x \in IR$

$f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$ Sachant que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$,

$$f'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$$

D'où $f'(\alpha) = \dfrac{-4 \times \dfrac{1}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+1\right)^2}$

$$= \frac{\dfrac{-4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{\cancel{1}+\alpha-\cancel{1}}{\alpha-1}\right)^2}$$

$$= -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

Le coefficient directeur de la droite (PQ) est : $\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{f(\alpha)-0}{0-\alpha} = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

d'où $-\dfrac{\dfrac{4}{e^\alpha+1}}{\alpha} = \dfrac{-4}{\alpha(e^\alpha+1)} = \dfrac{-4}{\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$

On en déduit que les deux droites sont parallèles lorsque M a pour abscisse **α**.

FONCTION EXPONENTIELLE EXERCICES NON CORRIGES

EXERCICE 1

f et g sont les fonctions d´définies sur IR par : $f(x)=-x^2e^x$ et $g(x)=(x^2-x-1)e^x$

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g.
2. Déterminer la position relative de C_f et C_g.
3. Déterminer les limites de f et g en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Dresser les tableaux de variations de f et g.

EXERCICE 2

Soit f la fonction d´définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm et Δ la droite d'équation $y=2x-2$.

1. a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de C et Δ.
2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.
   b) En d´enduire que, pour tout réel x positif, $f'(x)>0$.
   c) Préciser la valeur $f(0)$, puis établir le tableau de variation de f. 3. Avec le plus grand soin, tracer C et Δ dans le même repère.
4. Déterminer le point de A de C où la tangente `a C est parallèle à Δ. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonale.

1. Démontrer que f est une fonction impaire. Que peut-on en d´déduire pour la courbe C_f

Montrer que pour tout réel x, $f(x)=x+1-\dfrac{2}{1+e^{-x}}$. En d´déduire la limite de f en $+\infty$.

3. a) *Montrer que pour tout réel x ; $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$.*

   En d´déduire que la droite d'équation Δ d'équation $y=x-1$ est asymptote à C_f en $+\infty$

   b) *préciser la position de C_f par rapport à Δ.*

EXERCICE 4

On considère la fonction f d´définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$, et on d´désigne par C sa courbe représentative.

1. Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul , $e^{-x} \leq e^{x}$.
3. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$, et tracer l'allure de C.

EXERCICE 5

f est la fonction définie sur IR par : $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$.

C est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ Que peut-on en d´déduire ?
   b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
   b) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.