## *Série n°1 «Le Théorème des valeurs intermédiaires»*    *2éme Bac PC-SVT*

1. *Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle indiqué :*
   a) $x^7 - x^2 + 1 = 0$ *sur* $[-2;0]$
   b) $\tan(x) = \frac{3}{2}x$ *sur* $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right[$
   c) $\sqrt[3]{-x^3-6x+1} = 3x+2$ *sur* $\left]-\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right[$
2. a) *Montrer que l'équation* $\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5} = 0$ *possède dans* $]1;2[$ *une solution unique.*
   b) *Montrer que cette équation n'admet pas de solution dans les intervalles* $]-\infty;1[$ *et* $]2;+\infty[$ *(on pourra utiliser un tableau de signes).*
3. a) *Montrer que l'équation* $x^3 - 3x - 3 = 0$ *admet une solution unique* $\alpha$ *dans l'intervalle* $[2;3]$.
   b) *Donner un encadrement de* $\alpha$ *d'amplitude égale à* $10^{-1}$.
4. *On considère l'équation* $x = \cos(x)$.
   a) *Montrer que toute solution appartient nécessairement à l'intervalle* $[0;1]$.
   b) *Montrer l'existence et l'unicité de la solution.*
   c) *En donner des valeurs approchées par défaut et par excès à* $10^{-1}$ *près, puis à* $10^{-2}$ *près.*
5. **I)** *Soit la fonction* $P(x) = x^3 + x + 1$ .
   a) *Montrer qu'il existe un unique réel* $\alpha$ *tel que* $P(\alpha) = 0$ *; et que* $\alpha \in ]-1;0[$ .
   b) *Donner un encadrement de* $\alpha$ *d'amplitude* $10^{-1}$.
   **II)** *Soit la fonction* $f(x) = 6x^5 + 10x^3 + 15x^2 - 30$ .
   a) *Calculer* $f'(x)$ *; puis étudier son signe en fonction de* $\alpha$.
   b) *Dresser le tableau de variation de f.*
6. **I)** *Soit la fonction* $g(x) = x^3 + 3x - 2$ .
   a) *Montrer qu'il existe un unique réel α tel que* $g(\alpha) = 0$*; et que :* $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.
   b) *Donner un encadrement de* $\alpha$ *d'amplitude* $10^{-1}$.
   **II)** *Soit la fonction* $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ .
   a) *Préciser* $D_f$ *. Calculer* $f'(x)$ *et dresser le tableau de variation de f (On utilisera les résultats de la partie I). 1*
   b) *Etudier les branches infinies de la courbe de f en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *ainsi que la position relative de cette courbe et des asymptotes.(on pourra écrire* $\frac{x^3+1}{x^2+1} = ax + b - \frac{x(x-1)}{x^2+1}$*).*
   c) *Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.*

## ***Exercices supplémentaires***

7. *a) Montrer que la fonction* $P(x)=2x^3-3x^2-1$ *s'annule une seule fois sur* $\mathbb{R}$, *en* $\alpha$ .

   *Donner un encadrement de α d'amplitude* $10^{-1}$ .

   *b) Faire une étude complète de la fonction* $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$.

8. *Soit la fonction* $f(x)=x\sin x+\cos x$.

   *a) Calculer* $f'(x)$ *; puis dresser le tableau de variation de f sur* $[0;2\pi]$.

   *b) Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution* $\alpha$ *dans* $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

   *c) Montrer que* $\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\pi$ .

9. *I) Soit* $P(x)=-x^3+3x-6$.

   *a) Montrer que l'équation* $P(x)=0$ *admet dans l'intervalle* $]-\infty;-1]$ *une solution unique* $\alpha$

   *b) Montrer que* $-3<\alpha<-2$ *, puis donner un encadrement de* $\alpha$ *d'amplitude* $10^{-1}$ .

   *c) Dresser le tableau de variation de P.*

   *d) En déduire que* $\alpha$ *est l'unique racine réelle de P.*

***II)*** *Soit la fonction* $f(x)=\dfrac{3-x^3}{x^2-1}$.

*a) Déterminer* $D_f$ *le domaine de définition de f ainsi que les limites de f aux bornes de* $D_f$ .

*b) Calculer la dérivée de f, étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.*

*c) Montrer que pour tout* $x\in D_f$ *on a :* $f(x)=-x-\dfrac{x-3}{x^2-1}$

*d) Déterminer les asymptotes à f en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *, étudier la position relative de la courbe de f et deux de ces asymptotes (on pourra utiliser* $f(x)=-x-\dfrac{x-3}{x^2-1}$*).*

*d) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.*