Exercice 5 « Fonction Exponentielle »

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie sur IR par: $f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$

Et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ *; puis interpréter géométriquement le résultat .*

2- a. Vérifier que: $f(x)=x^2\left(1+2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$ *pour tout x de IR.*

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ *, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

3- a. Montrer que : $f'(x)=-2x(e^x-1)$ *pour tout x de IR.*

b. Dresser le tableau de variations de f.

4- a. Montrer que l'équation : $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans IR et que :* $1<\alpha<\frac{3}{2}$ *.*

b. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la courbe* (C)*.* *(on prend:* $\alpha\simeq1{,}3$ *)*

Correction Exercice 5

$f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$

1) a. ∎ Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2xe^x+2e^x=+\infty$ *(Car* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$*)*

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

∎ Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x-2e^x+2\frac{e^x}{x}=-\infty$ *(Car* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$*)*

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty}$

Interprétation géométrique:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ *; la courbe* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage* $-\infty$*.*

2) a. Vérifions que : $(\forall x\in IR^*)$

2) a. Vérifions que : $f(x)=x^2\left(1+2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$

Soit $x\in IR^*$ *, on a:* $f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$

$$=x^2\left(1-2x\times\frac{e^x}{x^2}+2\frac{e^x}{x^2}\right)$$

$$= \boldsymbol{x}^2\left(1-2(\boldsymbol{x}-1)\frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{x}^2}\right)$$

$$= \boldsymbol{x}^2\left(1+2(1-\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{x}^2}\right)$$

Donc : $(\forall x \in IR^*)$ $\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2\left(1+2(1-\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{x}^2}\right)}$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}}$

■ *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{x}^2\left(1+2(1-\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{x}^2}\right) = -\infty$

(*Car* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{x}^2} = +\infty$)

■ *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{x}\left(1+2(1-\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{x}^2}\right) = -\infty$

(*Car* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{x}^2} = +\infty$)

Interprétation géométrique:

donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a. Montrons que: $(\forall x \in IR)$; $f'(x) = -2x(e^x - 1)$

La fonction f est dérivable sur IR et on a:

$(\forall x \in IR)$; $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^x + 2\boldsymbol{e}^x\right)'$

$$= 2x - 2\left(xe^x + e^x\right) + 2e^x$$

$$= 2x - 2xe^x - \cancel{2e^x} + \cancel{2e^x}$$

$$= -2x\left(e^x - 1\right)$$

b. Soit $x \in IR$ *on a :* $f'(x) = -2x(e^x - 1)$

Puisque le signe de $(e^x - 1)$ *est celui de x, alors* $x(e^x - 1) > 0$ *d'où* $f'(x) < 0$ *pour tout* $x \in IR$

Tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4) a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *dans IR.*

On a les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto e^x$ *sont continue sur IR*

Donc la fonction f est continue sur IR.

D'où f est continue st strictement décroissante sur IR.ET

$f(]-\infty;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[$ *;puisque* $0 \in]-\infty;+\infty[$ *alors d'après le TVI il existe un unique réel* α *tel que* α *est solution de l'équation* $f(x) = 0$

Montrons que: $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

On a : $f(1)=1$ *et* $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-3e^{\frac{3}{2}}+2e^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}-e^{\frac{3}{2}}<0$

Donc $f\left(\frac{3}{2}\right)<0<f(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)<f(\alpha)<f(1)$

Et comme f est strictement décroissante sur IR , alors : $1<\alpha<\frac{3}{2}$

b. *Construction de* $(\boldsymbol{C})$