



guessmaths

Correction Examen nationale 2010 Session de Rattrapage
2ème Bac SM A et B

Exercice 1:

1- Montrons que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de E ; on a :

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ (x+y)^2 & 2(x+y) & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(x+y) \end{aligned}$$

Et $M(x+y) \in E$; donc pour tous $M(x)$ et $M(y)$ éléments de E ; $(M(x) \times M(y)) \in E$

D'où E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

2) a- Montrons que l'application φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.

$$\begin{aligned} \text{Soient } x \text{ et } y \text{ deux réels ; on a : } \varphi(x+y) &= M(x+y) \\ &= M(x) \times M(y) \\ &= \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; \varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

D'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.

Pour tout M élément de E il existe un réel x tel que : $M = M(x)$; donc :

$$(\forall M \in E)(\exists x \in \mathbb{R}) \quad / \quad M = \varphi(x)$$

D'où φ est surjective.

$$\text{Soient } x \text{ et } y \text{ deux réels ; tels que : } \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \\ 2x = 2y \end{cases}$$

D'où φ est injective.

Par suite φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.

b- Dédudions que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

On sait que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif et comme φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$; alors $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

c- Soit x un réel; l'opposé de x dans $(\mathbb{R}, +)$ est $(-x)$; donc l'opposé de $\varphi(x) = M(x)$ est $\varphi(-x) = M(-x)$

$$\text{D'où l'inverse de } M(x) \text{ dans } (E, \times) \text{ est } M(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ x^2 & -2x & 1 \end{pmatrix}$$

d- résolvons dans l'ensemble E l'équation $A^5 X = B$

Soit X un élément de E ; donc $X = M(x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$; donc φ^{-1} est un isomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

$$\text{D'où } \varphi^{-1}(A^5 X) = \varphi^{-1}(A^5) + \varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(B)$$

$$\varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(B) - \varphi^{-1}(A^5)$$

$$\text{Et } \varphi^{-1}(X) = x ; B = M(12) \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = 12$$

$$\varphi^{-1}(A) = \underbrace{\varphi^{-1}(A) + \varphi^{-1}(A) + \dots + \varphi^{-1}(A)}_{\text{5 fois}} = 5\varphi^{-1}(A)$$

$$A = M(2) \Rightarrow \varphi^{-1}(A) = 2 ; \varphi^{-1}(X) = x$$

$$\text{Donc } x = \varphi^{-1}(B) - \varphi^{-1}(A^5) = 12 - 10 = 2$$

et Par suite $S = \{M(2)\}$

$F = \{M(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$ est sous-groupe de

• l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est le réel 0 ; donc $M(0) = \varphi(0)$ est l'élément neutre de $(F, \times)$

3) Montrons que l'ensemble $(F, \times)$ est sous- groupe de

comme $M(0) = M(\ln 1)$ et $1 \in \mathbb{R}_+^*$ alors $M(0) \in F$; donc $F \neq \emptyset$

• Soient A et B deux éléments de F ; alors

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*) / A = M(\ln a) \text{ et } B = M(\ln b) \text{ et } B^{-1} = M(-\ln b) = M\left(\ln\left(\frac{1}{b}\right)\right)$$

$$\text{Donc } A \times B^{-1} = M(\ln a) \times M\left(\ln\left(\frac{1}{b}\right)\right)$$

$$= M\left(\ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right)\right)$$

$$= M\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right) \text{ et comme } \frac{a}{b} \in \mathbb{R}_+^* ; \text{ alors } (A \times B^{-1} \in F)$$

D'où F est sous-groupe de

Exercice 2 :

1) L'équation : $(E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

a- vérifions que le nombre $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E)

$$\text{On a : } (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2 - 4i(1 + i(2 - \sqrt{3})) - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 + 2i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 - 4i + 4(2 - \sqrt{3}) - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 + 4i - 2i\sqrt{3} - 4 + 4\sqrt{3} - 3 - 4i + 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} = 9 - 9 = 0$$

Donc le nombre $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E)

b- Déduisons b la deuxième solution de l'équation (E)

On sait que la somme des deux solutions de (E) est égale à l'opposé de la quotient du coefficient de z par celui de z^2 ; donc :

$$a + b = 4i \Rightarrow b = 4i - a$$

$$\Rightarrow b = 4i - (1 + i(2 - \sqrt{3}))$$

$$\Rightarrow b = -1 + i(2 + \sqrt{3})$$

2) a-Montrons que : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\text{On a : } a^2 = (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2$$

$$= 1 + 2i(2 - \sqrt{3}) + (i(2 - \sqrt{3}))^2$$

$$= 1 + 4i - 2i\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})^2$$

$$= 1 + 4i - 2i\sqrt{3} - 4 + 4\sqrt{3} - 3$$

$$= -6 + 4\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})2i$$

$$= 2(-3 + 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})2i$$

$$\begin{aligned}
&= 2(2 - \sqrt{3}) \left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + i \right) \\
&= 2(2 - \sqrt{3}) ((-3 + 2\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) + i) \\
&= 2(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \\
&= 4(2 - \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\
&= 4(2 - \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Donc $a^2 = 4(2 - \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{6}}$

b- On a : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{6}}$; donc a est une racine carrée de $z = 4(2 - \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{6}}$

D'où $a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = -2\sqrt{2 - \sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{12}}$
 Comme $\operatorname{Re} a > 0$ et $\operatorname{Im} a > 0$; alors :

$$a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

a- Déterminons ω l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ)

$[AB]$ est le diamètre du cercle (Γ) ; donc l'affixe du point Ω centre du cercle

$$(\Gamma) \text{ est } \omega = \frac{a+b}{2} = 2i$$

b- Montrons que les points O et C appartiennent au cercle (Γ)

$$\text{Le rayon du cercle } (\Gamma) \text{ est : } R = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|2-2i\sqrt{3}|}{2} = 2$$

- $\Omega O = |\omega| = |2i| = 2 \Rightarrow \Omega O = R$; donc $O \in (\Gamma)$
- $\Omega C = \left| 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}} - 2i \right| = \left| 2e^{i\frac{\pi}{7}} \right| = 2 \Rightarrow \Omega C = R$; donc $C \in (\Gamma)$

c- Montrons que le nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

On a : $C \in (\Gamma)$ est C est distinct des points A et B ; est comme $[AB]$ est l'un des diamètre du cercle (Γ) ; alors le triangle ABC est rectangle en C ;

d'où : $(\overline{AC}; \overline{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; donc $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 :

1) On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience

a- X est la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées. Donc X peut prendre les valeurs 1 ; 2 et 3

b- Calculons $p[X=1]$

L'événement $[X=1]$ est « Obtenir une boule Blanche au 1^{er} Tirage » ; donc :

$$\text{Card}(\Omega) = A_{12}^1 = 6 \text{ et } p[X=1] = \frac{\text{Card}(X=1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_{10}^1}{A_{12}^1} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Donc } p[X=1] = \frac{5}{6}$$

c- Calculons $p[X=2]$

L'événement $[X=1]$ est « Obtenir une boule Blanche au 2^{ème} Tirage » ; donc :

$$\text{Card}(\Omega) = A_{12}^2 = 33 \text{ et } p[X=2] = \frac{\text{Card}(X=2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_2^1 A_{10}^1}{A_{12}^2} = \frac{5}{33}$$

$$\text{Donc } p[X=2] = \frac{5}{33}$$

d- Calculons $p[X=3]$

L'événement $[X=1]$ est « Obtenir une boule Blanche au 2^{ème} Tirage » ; donc :

$$\text{Card}(\Omega) = A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320 \text{ et}$$

$$p[X=3] = \frac{\text{Card}(X=3)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_2^2 A_{10}^1}{1320} = \frac{2 \times 10}{1320} = \frac{1}{66}$$

$$\text{Donc } p[X=3] = \frac{1}{66}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ a- On a : } E(X) &= \sum_{i=1}^3 X_i \times p[X=X_i] \\ &= 1 \times p[X=1] + 2 \times p[X=2] + 3 \times p[X=3] \\ &= 1 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{5}{33} + 3 \times \frac{1}{66} \\ &= \frac{13}{11} \end{aligned}$$

Donc l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{13}{11}$

$$\begin{aligned} \text{b- On a : } E(X^2) &= \sum_{i=1}^3 X_i^2 \times p[X=X_i] \\ &= 1^2 \times p[X=1] + 2^2 \times p[X=2] + 3^2 \times p[X=3] \\ &= 1 \times \frac{5}{6} + 4 \times \frac{5}{33} + 9 \times \frac{1}{66} \\ &= \frac{52}{33} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E(X^2) = \frac{52}{33}$$

On sait que : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2 = \frac{65}{363}$

Donc la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X est : $V(X) = \frac{65}{363}$

Problème : (10 points)

I - f définie sur $I = [0,1]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} ; 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1) Montrons que f est continue à gauche en 1.

Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - \ln(1-x)}$; posons $t = 1-x$ alors $x \rightarrow 1^- \Rightarrow t \rightarrow 0^+$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - \ln(1-x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \ln(t)} = 0 \quad (\text{car } \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty) \quad \text{et } f(1) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

D'où f est continue à gauche en 1.

2) Etudions la dérivabilité de f à gauche en 1.

Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{1 - \ln(1-x)}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x - 1)(1 - \ln(1-x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x - 1) - (x - 1)\ln(1-x)} \end{aligned}$$

On pose : $t = 1-x$ alors $x \rightarrow 1^- \Rightarrow t \rightarrow 0^+$; donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{-t + t \ln t} = -\infty \quad (\text{car } \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$; d'où f n'est pas dérivable à gauche en 1.

3) La fonction $x \mapsto 1 - \ln(1-x)$ est dérivable sur $[0,1[$ et $(\forall x \in [0,1[) : 1 - \ln(1-x) \neq 0$

Donc f est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{(1-\ln(1-x))'}{(1-\ln(1-x))^2} \\
 &= -\frac{-(-1)}{(1-\ln(1-x))^2} \\
 &= -\frac{1}{(1-x)(1-\ln(1-x))^2}
 \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in [0,1[) ; f'(x) < 0$; d'où f est strictement décroissante sur

Tableau de variations de f

x	0	1
$f'(x)$	—	
$f(x)$	1	0

4) a-La fonction $f' : x \mapsto -\frac{1}{(1-x)(1-\ln(1-x))^2}$ est dérivable sur et on a :

$$f''(x) = \frac{\left((1-x)(1-\ln(1-x))^2\right)'}{\left((1-x)(1-\ln(1-x))^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \left((1-x)(1-\ln(1-x))^2\right)' &= -(1-\ln(1-x))^2 + 2(1-x)(1-\ln(1-x))'(1-\ln(1-x)) \\
 &= -(1-\ln(1-x))^2 + 2(1-x)\frac{1}{1-x}(1-\ln(1-x)) \\
 &= (1-\ln(1-x))(2-(1-\ln(1-x))) \\
 &= (1-\ln(1-x))(1+\ln(1-x))
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f''(x) = \frac{(1-\ln(1-x))(1+\ln(1-x))}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^4}$$

Et $1-x < 1 \Rightarrow \ln(1-x) < 0$; d'où $1-\ln(1-x) > 0$

Par suite $f''(x)$ est du même signe que $(1+\ln(1-x))$

$$1+\ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

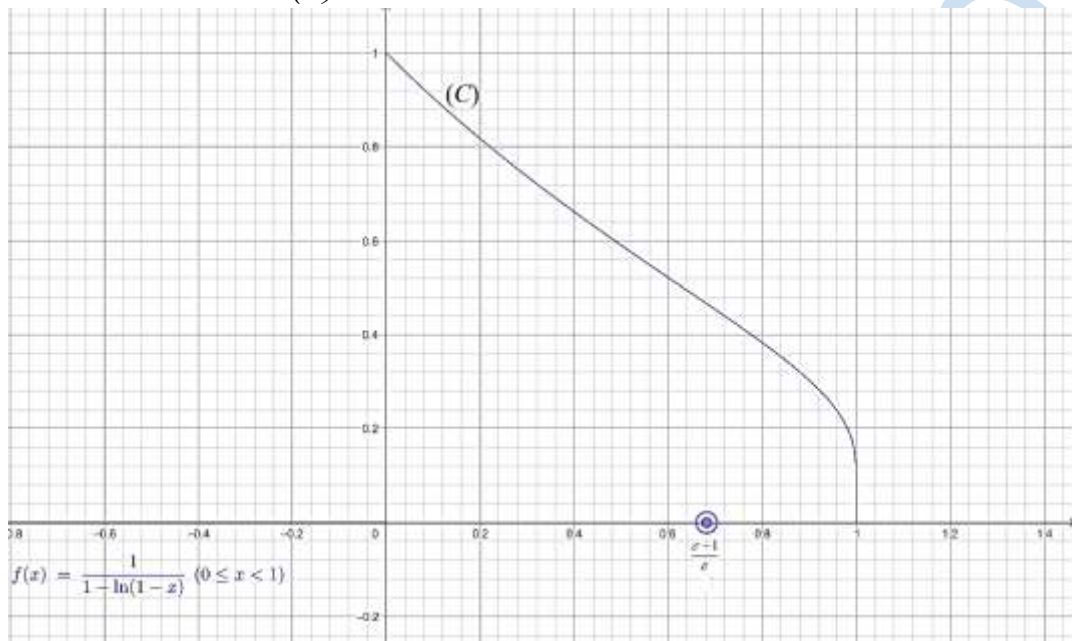
$$\Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e-1}{e}$$

Donc $f''(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{e-1}{e}$; d'où la courbe (C) admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\frac{e-1}{e}$

b- Construction la courbe (C)



5) On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = f(x) - x$

Les fonctions f et $x \mapsto -x$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,1]$

Donc h est strictement décroissante sur $[0,1]$ et h est continue sur $[0,1]$ (comme somme de deux fonctions continues)

De plus $h(1) = f(1) - 1 = -1$ et $h(0) = f(0) - 0 = 1$

Donc $h(0) \times h(1) < 0$

D'après TVI l'équation $h(x) = 0$ (càd $f(x) = x$) admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$

Par suite il existe un réel unique α de l'intervalle I vérifiant : $f(\alpha) = \alpha$

6) a- Montrons que f est une bijection de l'intervalle I vers I

f est continue et strictement décroissante sur I ; donc f est une bijection de I vers $f(I) = [f(1), f(0)] = [0,1] = I$

b- Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle I .

$$\text{On a : } \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in]0,1] \\ y \in [0,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ x \in]0,1] \\ y \in [0,1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1 - \ln(1 - \gamma)} \\ x \in]0, 1] \\ \gamma \in [0, 1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \ln(1 - \gamma) = \frac{1}{x} \\ x \in]0, 1] \\ \gamma \in [0, 1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(1 - \gamma) = 1 - \frac{1}{x} \\ x \in]0, 1] \\ \gamma \in [0, 1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \gamma = e^{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \\ x \in]0, 1] \\ \gamma \in [0, 1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 - e^{\left(\frac{x-1}{x}\right)} \\ x \in]0, 1] \\ \gamma \in [0, 1[\end{cases}$$

Donc f^{-1} est définie sur I par :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = 1 - e^{\frac{x-1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f^{-1}(0) = 1 \end{cases}$$

II- On pose : $I_0 = \int_0^1 f(t) dt$, et pour tout entier naturel n non nul ; $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$

1) Montrons que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt - \int_0^1 t^n f(t) dt$$
$$= \int_0^1 t^n (t - 1) f(t) dt$$

Et comme $f(t) \geq 0$; $t^n \geq 0$ et $t - 1 \leq 0$ alors $\int_0^1 t^n (t - 1) f(t) dt \leq 0$

Par suite $I_{n+1} - I_n \leq 0$

Donc la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt \geq 0$

Donc la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 0.

La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente.

2) Montrons que : $(\forall n \geq 0) : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $f([0,1]) \subset [0,1]$; donc $(\forall t \in [0,1]) 0 \leq f(t) \leq 1$

D'où $0 \leq t^n f(t) \leq t^n$

$$\text{Par suite } 0 \leq \int_0^1 t^n f(t) dt \leq \int_0^1 t^n dt \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

III- Pour tout nombre réel x de l'intervalle $J = [0;1[$ et pour tout entier naturel n non nul on pose :

$$F_0(x) = \int_0^x f(t) dt ; F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt ; F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n F_k(x)$$

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) F(x) - S_n = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$

Soit $x \in J$ et n un entier naturel ; on a :

$$\begin{aligned} F(x) - S_n &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^n F_k(x) \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n t^k \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t) - (1-t^{n+1})f(t)}{1-t} dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) F(x) - S_n = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$$

2) a-Montrons que la fonction $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ est strictement décroissante sur J

Soit la fonction $g : x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$

g est dérivable sur J (comme composée et produit de fonctions continues sur J) ; et

$$\begin{aligned} \text{on a pour tout } x \in J : g'(x) &= -(1 - \ln(1-x)) + (1-x) \times (1 - \ln(1-x))' \\ &= -(1 - \ln(1-x)) + (1-x) \times \frac{1}{1-x} \\ &= \ln(1-x) \end{aligned}$$

$$x \in J = [0,1[\text{ donc } 1-x \leq 1 \Rightarrow \ln(1-x) \leq 0$$

$$\Rightarrow g'(x) \leq 0$$

Donc la fonction $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ est strictement décroissante sur J

b-Montrons que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0,x]$ pour

tout x élément de J

Soit $x \in J$; pour tout $t \in [0,x]$; on a :

$$\frac{f(t)}{1-t} = \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{1}{g(t)}$$

Et comme g est strictement décroissante sur J en particulier sur $[0,x]$; alors la

fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0,x]$ pour tout x élément de J