Exercice 1

4. A l'aide des sommes de Riemann d'une fonction convenable, calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

(i) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$; (ii) $b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n\alpha+k} \quad (\alpha>0)$; (iii) $c_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Correction Exercice 1

4. (i) Si l'on pose $f(x)=\sin(\pi x)$ *pour* $x\in[0;1]$ *, on a encore* $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. *Cette suite converge vers la valeur moyenne de f sur* $[0;1]$, *donc*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

(ii) On écrit

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n\alpha+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\alpha+k}+\frac{1}{n\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha+\frac{k}{n}}\right)+\frac{1}{n\alpha}$$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha+\frac{k}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *; où* $f : x\mapsto \frac{1}{\alpha+x}$ *; donc :*

$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n\alpha+k}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\alpha} = \int_0^1\frac{1}{\alpha+x}dx$ *; par suite :* $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ln(1+\alpha)-\ln(\alpha) = \ln\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)$

(iii) $c_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

On écrit

$$\ln c_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

; où $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *; donc :* $\ln c_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$

Procédons par une intégration par partie pour calculer $\int_0^1 \ln(1+x)$

On pose : $\begin{cases} u = \ln(1+x) & u' = \dfrac{1}{1+x} \\ v' = 1 & v = x \end{cases}$

Donc : $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}\,dx$$
$$= \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$= \ln 2 - \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1$$
$$= \ln 2 - (1 - \ln 2)$$
$$= 2\ln 2 - 1$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln c_n = 2\ln 2 - 1$ *; et comme la fonction exponentielle est continue sur* $\mathbb{R}$ *; alors :*

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$

<u>Exercice 2</u>

A l'aide des sommes de Riemann d'une fonction convenable, calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

(i) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ *(ii)* $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(n\alpha+k)^2}$ $(\alpha > 0)$

<u>Correction Exercice 2</u>

(i) Si l'on pose $f(x) = \cos(\pi x)$ *pour* $x \in [0;1]$ *, on a :* $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *. Cette suite converge vers la valeur moyenne de f sur* $[0;1]$*, donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\sin(\pi x)\right]_0^1 = 0$.

(ii) On écrit $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(n\alpha+k)^2}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n\alpha+k)^2} + \frac{n}{(n\alpha)^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(\alpha+\frac{k}{n}\right)^2} + \frac{1}{n\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\alpha+\frac{k}{n}\right)^2}+\frac{1}{n\alpha^2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\alpha+\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f:x\mapsto\frac{1}{(\alpha+x)^2}\ ;$$

Cette suite converge vers la valeur moyenne de f sur $[0;1]$, *donc :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\alpha+\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{(\alpha+x)^2}dx$.

$$=\left[\frac{-1}{(\alpha+x)}\right]_0^1$$

$$=\frac{-1}{(\alpha+1)}+\frac{1}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\alpha^2}=0$ *;donc ;* $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$