PROBLEME :

Partie I

Soient a et b deux entiers naturels non nuls, tels que : a^3+b^3 *est divisible par* 173 *.*
On notera que 173 *est un nombre premier.*

1. *Montrer que :* $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ *. (On remarquera que* $171=3\times 57$ *).*
2. *Montrer que a est divisible par* 173 *si et seulement si b est divisible par* 173*.*
3. *On suppose que a est divisible par* 173*. Montrer que* $a+b$ *est divisible par* 173*.*
4. *On suppose que a n'est pas divisible par* 173*.*

4.1 *À l'aide du petit théorème de Fermat, montrer que :* $a^{172}\equiv b^{172}[173]$ *.*

4.2 *Montrer que :* $a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$

4.3 *En déduire que :* $a+b$ *est divisible par* 173*.*

Partie II

Dans $IN^*\times IN^*$ *on considère l'équation* (E) *suivante :*

$(E): x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit $(x,y)\in IN^*\times IN^*$ *solution de l'équation* (E)*.*

On pose : $x+y=173k$ *où* k *est un entier naturel non nul.*

1. *Vérifier que :* $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ *.*
2. *Montrer que* $k=1$ *puis résoudre l'équation* (E)*.*

CORRECTION :

Partie I

1. a^{171} **est congru à** $-b^{171}$ **modulo** 173 **:**

a et b sont deux entiers naturels non nuls, tels que a^3+b^3 *est divisible par* 173*. Cela signifie que :* $a^3+b^3\equiv 0[173]$*, c'est à dire que* $a^3\equiv -b3[173]$*.*

À l'aide de la propriété suivante sur les congruences **:**

Soient n un entier naturel non nul et x, y deux entiers relatifs.
Pour tout entier naturel k *, si* $x\equiv y[n]$ *alors* $x^k\equiv y^k[n]$*.*

On en déduit que : $(a^3)^{57}\equiv(-b^3)^{57}[173]$

C'est à dire : $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$

a^{171} *est congru à* $-b^{171}$ *modulo* 173*.*

2. a est divisible par 173 *si et seulement si b est divisible par* 173 *:*
Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On va faire une preuve en deux temps.
Sens direct **:**

Supposons que a est divisible par 173 *et montrons que b est divisible par* 173*.*
On rappelle la propriété suivante **:**

Soient a, b, a' *et* b' *quatre entiers relatifs et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.*
Si $a\equiv b[n]$ *et* $a'\equiv b'[n]$ *alors* $a-a'\equiv b-b'[n]$ *.*

a est divisible par 173 *signifie que* $a \equiv 0[173]$*, c'est à dire,* $a^3 \equiv 0[173]$.

On sait d'après l'énoncé que a^3+b^3 *est divisible par* 173*, donc* $a^3+b^3 \equiv 0[173]$.

Soit en regroupant :

$\begin{cases} a^3+b^3 \equiv 0[173] \\ a^3 \equiv 0[173] \end{cases}$ *Et d'après la propriété rappelée ci-dessus, on a* $(a^3+b^3)-a^3 \equiv 0[173]$ *, soit* $b^3 \equiv 0[173]$

et par suite b≡0[173] car 173 *est premier (Si a est premier et divise* b^n *, alors a divise b).*
Donc si a est divisible par 173 *alors b est divisible par* 173
<u>*Sens réciproque*</u> **:**

On raisonne de la même façon que le sens direct car ici a et b jouent le même rôle et on a :
b est divisible par a signifie que $b \equiv 0[173]$ *, c'est à dire que* $b^3 \equiv 0[173]$ *puis* $((a^3+b^3)-b^3 \equiv 0[173]$

d'où $a^3 \equiv 0[173]$ *et* $a \equiv 0[173]$.

Ainsi, si b est divisible par173*, alors a est aussi divisible par* 173.

a est divisible par 173 *si et seulement si b est divisible par* 173.

3. On suppose que a est divisible par 173*. Montrer que* $a+b$ *est divisible par* 173 *:*
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Dans cette question, on suppose que a est divisible par 173.
b est aussi divisible par 173 *d'après le résultat établi à la question précédente.*
Comme la congruence est compatible avec la somme alors, $a+b$ *est divisible par* 173.

Si a est divisible par 173*, alors* $a+b$ *est aussi divisible par* 173.

<u>*Compatibilité de la congruence avec la somme (Rappel)*</u>

Soient a, b, a' *et* b' *quatre entiers relatifs et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.*
Si $a \equiv b[n]$ *et* $a' \equiv b'[n]$ *, alors* $a+a' \equiv b+b'[n]$.

4. On suppose que a n'est pas divisible par 173.
4.1 Montrer que : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$ *:*

L'énoncé propose de démontrer ce résultat à l'aide du petit théorème de Fermat.

<u>*Petit théorème de Fermat (Rappel)*</u> *:*
Si p est un entier naturel premier et a un entier premier avec p, alors : $a^{p-1}-1 \equiv 0[p]$.

Comme 173 *est un entier naturel premier et a et* 173 *sont premiers entre eux car*173 *ne divise par a, alors d'après le petite théorème de Fermat, on a :* $a^{173-1}-1 \equiv 0[173]$

On en déduit que : $a^{172} \equiv 1[173]$

Par ailleurs, dire que a n'est pas divisible par 173 *signifie que b n'est pas divisible non plus par* 173 *d'après le résultat établi à la question 2, et on a d'après le petit théorème de Fermat :* $b^{172} \equiv 1[173]$

On en déduit que, $a^{172} \equiv b^{172}[173]$

Finalement, si a n'est pas divisible par 173*, alors* a^{172} *est congru à* b^{172} *modulo* 173.

4.2 Montrer que **:** $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$ **:**
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On a établi à la question 1 que : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$

On en déduit que : $-a^{171} \equiv b^{171}[173]$

Car la congruence est compatible avec la multiplication
$\forall c \in \mathbb{Z}$ *, si* $a \equiv b[n]$ *alors* $ac \equiv bc[n]$ *, en particulier si* $a \equiv b[n]$ *alors* $(-a) \equiv (-b)[n]$.

On multiplie ensuite les deux côtés de l'égalité par b et on obtient : $-b\times a^{171}\equiv b^{172}[173]$

On utilise ensuite le résultat établi à la question précédente $a^{172}\equiv b^{172}[173]$ *) et on a :* $-b\times a^{171}\equiv a^{172}[173]$

Par symétrie de la congruence (Si $a\equiv b[n]$ *, alors* $b\equiv a[n]$*) on a :*

$a^{172}\equiv -b\times a^{171}[173]$ *Par suite,* $a^{172}+b\times a^{171}\equiv 0[173]$

D'où : $a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$

$a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$ *. Autrement dit,* $a^{171}(a+b)$ *est divisible par* 173.

4.3 En déduire que : $a+b$ *est divisible par* 173

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Pour répondre à cette question, on va utiliser la relation établie à la question précédente ($a^{171}(a+b)$ *est divisible par* 173 *) et le théorème de Gauss.*

Théorème de Gauss (Rappel) :

Soit n un entier qui divise le produit ab. Si n est premier avec a, alors n divise b.

On sait que a n'est pas divisible par 173 *donc* a^{171} *n'est pas divisible non plus par* 173 *et* a^{171} *et* 173 *sont premiers entre eux.*

On a établi à la question précédente que $a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$ *, c'est à dire que* $a^{171}(a+b)$ *est divisible par* 173.

Ainsi, 173 *divise* $a+b$ *d'après le théorème de Gauss.*

Partie II

Le but de cette partie est de résoudre l'équation : $(E): x^3+y^3=173(xy+1)$

Où x et y sont des entiers naturels non nuls.

1. Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

Soit $(x,y)\in IN^*\times IN^*$ *une solution de l'équation* (E).

On a donc, $x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit en factorisant,

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=173(xy+1)$ *On sait d'après l'énoncé que* $x+y=173k$ *avec* $k\in IN^*$ *, donc,*

$173k(x^2-xy+y^2)=173(xy+1)$

Soit en simplifiant par 173 *;* $k(x^2-xy+y^2)=(xy+1)$ *Comme* $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy$ *, alors,*

$k(x-y)^2+kxy=xy+1$

Soit, $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

Si $(x,y)\in IN^*\times IN^*$ *est solution de l'équation* (E)*, alors on a le relation :* $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ *où* k *est un entier naturel non nul.*

2. Montrer que $k=1$ *puis résoudre l'équation* (E) *:*

On démontre d'abord que $k=1$ *:*

On utilise la relation établie à la question précédente que l'on va d'abord majorer et ensuite raisonner par l'absurde.

On a : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ *où* $(x,y)\in IN^*\times IN^*$ *est solution de l'équation* (E) *et* k *est un entier naturel non nul. Autrement dit,* $(k-1)xy=1-k(x-y)^2$

D'où, $(k-1)xy\leq 1$ *car la quantité* $k(x-y)^2$ *est positive.*

Et puisque k *, x et y sont des entiers naturels non nuls, alors l'inégalité* $(k-1)xy\leq 1$ *est vérifiée si :*

$$\begin{cases} (k-1)xy=0 \\ \quad ou \\ (k-1)xy=1 \end{cases}$$

Examinons chacune de ces deux égalités **:**

(1) $(k-1)xy=0$ *:*

Puisque $x\neq 0$ *et* $y\neq 0$ *alors* $k-1=0$ *et* $k=1$.

(2) $(k-1)xy=1$ *:*

Puisque k *, x et y sont des entiers naturels non nuls, alors pour que cette égalité soit vérifiée il faut nécessairement avoir* $k-1=x=y=1$ *, c'est à dire :* $k=2$, $x=1$ *et* $y=1$

Or on sait par l'énoncé que $x+y=173k$ *, on en déduit en remplaçant x, y et* k *par les valeurs ainsi obtenues que* $1+1=346$ *ce qui est impossible.*

Donc la seule possibilité pour avoir l'inégalité $(k-1)xy\leq 1$ *est* $k=1$.

Voici une autre méthode pour répondre à cette question **:**

Cette méthode repose uniquement sur un raisonnement par l'absurde alors que la méthode précédente combinait « absurde + majoration ». On suppose que $k\neq 1$ *. Comme* k *est un entier naturel non nul, alors* $k\geq 2$.

Ensuite, on a soit $x\neq y$ *, soit* $x=y$.

1er cas : $x\neq y$

On a $k(x-y)^2\geq 1$ *car* $k\geq 2$ *et* $x\neq y$*, et* $(k-1)xy\geq 1$ *, on en déduit que* $k(x-y)^2+(k-1)xy\geq 2$ *, ce qui est contradictoire car l'expression* $k(x-y)^2+(k-1)xy$ *qui est égale à 1.*

2ème cas : $x=y$

La relation $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ *devient* $(k-1)x^2=1$ *, d'où* $k-1=1$ *et* $x^2=1$ *c'est à dire* $k=2$ *et* $x=1$.

Or on sait par l'énoncé que $x+y=173k$ *, on en déduit en remplaçant x et y par 1et k par 2 que* $1+1=2\times 173$ *ce qui est impossible.*

Donc l'hypothèse de départ qui consiste à dire que $k\neq 1$ *est fausse. Donc* $k=1$.

On résout ensuite l'équation (E) **:**

On a : $(E): x^3+y^3=173(xy+1)$

D'une part, on sait d'après l'énoncé que x^3+y^3 *est divisible par* 173 *. (C'est d'ailleurs ce que suggère l'équation* (E)*).*

D'autre part, on sait d'après la question 4.3 que $x+y$ *est divisible par* 173*, il existe donc un entier naturel non nul* k *tel que :* $x+y=173k$

Comme $k=1$*, alors,* $x+y=173$

Par ailleurs, on a montré à la question précédente que $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ *où* $(x,y)\in IN^*\times IN^*$ *est solution de l'équation* (E) *et* k *est un entier naturel non nul.*

Soit avec $k=1$, $(x-y)^2=1$

C'est à dire, $x-y=1$ *ou* $x-y=-1$

On aboutit ainsi au système d'équation suivant, qu'il faudra résoudre dans $IN^*\times IN^*$ *:*

$$\begin{cases} x+y=173 \\ x-y=1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=173 \end{cases}$$

D'où,

$\begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x=86 \\ y=87 \end{cases}$

Les solutions de l'équation (E) *sont soit* $(87,86)$ *, soit* $(86,87)$.

On vérifie bien entendu que les couples $(87,86)$ *et* $(86,87)$ *sont solutions de* (E) *en injectant leur valeur numérique dans* (E)

Vérification pour $(87,86)$ *:*

On a : $87^3+86^3=658503+636056=1294559$ *et* $173(87\times 86+1)=1294559$.

Il y a donc égalité.

Vérification pour $(86,87)$ *:*

On a : $86^3+87^3=1294559$ *et* $173(86\times 87+1)=1294559$

Il y a donc égalité.