Série n ° 1 d'exercices sur les fonctions limites et continuité

guessmaths

Terminale S

EXERCICE 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = (x+2)e^{-x} + 1$ *et la droite d d'équation* $y = 1$.

1) Tracer la courbe de la fonction f et la droite d pour $x \in [-3;3]$ *et* $y \in [-3;4]$.

Que peut-on conjecturer pour les limites de f en $+\infty$ *et* $-\infty$ *?*

2) Que représente la droite d pour la courbe C_f *en* $+\infty$ *? Pourquoi ?*

3) On donne l'algorithme en Python suivant.

a) Que représente $\text{abs}(f(x)-1)$ *?*

b) Que renvoie la fonction $\text{dis}(a)$ *?*

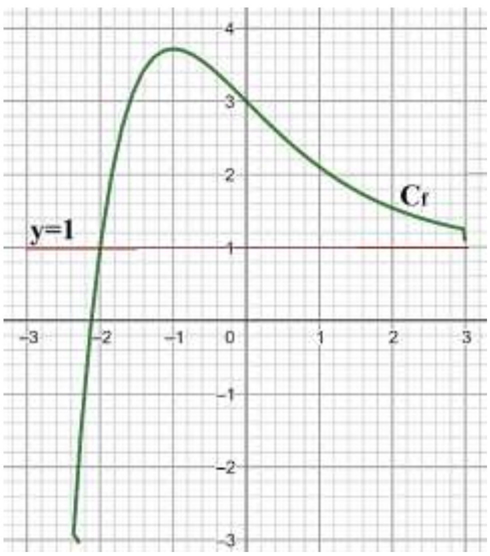
c) À l'exécution, $\text{dis}(10^{**}(-3))$ *renvoie 10 et* $\text{dis}(10^{**}(-6))$ *renvoie 17.*

En quoi ces valeurs permettent-elles de vérifier la limite de $f(x)$ *en* $+\infty$ *?*

```
from math import *
def  f(x)
        return (x+2)*exp(-x)>=a :
def dist(a) :
       x=1
     while  abs(f(x)-1)>=a :
             x+=1
        return x
```

Correction

1)



www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
WhatsApp : 0717467136

On peut conjecturer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2) La droite d représente une asymptote horizontale à la courbe C_f *en* $+\infty$ *; car* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

3)

EXERCICE 2

1) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

a) Tracer la courbe de la fonction f sur $x\in[-4;4]$ *et* $y\in[-1;5]$.

b) f est-elle définie en 0 *? Admet-elle une limite en* 0 *? Si oui laquelle ?*

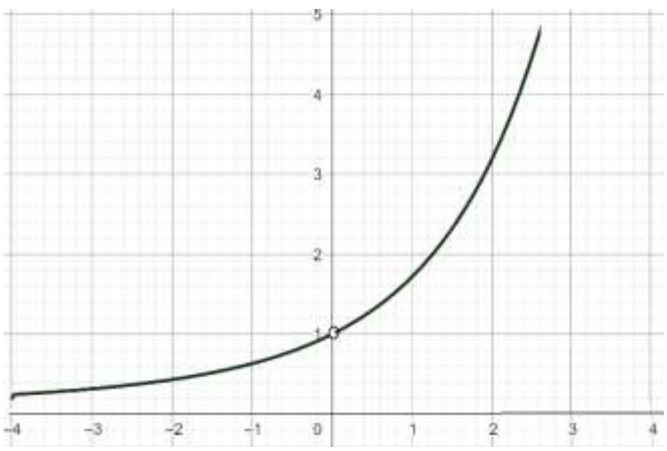
2) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

a) Tracer la courbe sur $x\in[-5;5]$ *et* $y\in[-5;5]$.

b) f est-elle définie en 0 *? Admet-elle une limite en* 0 *? Si oui laquelle ?*

Correction

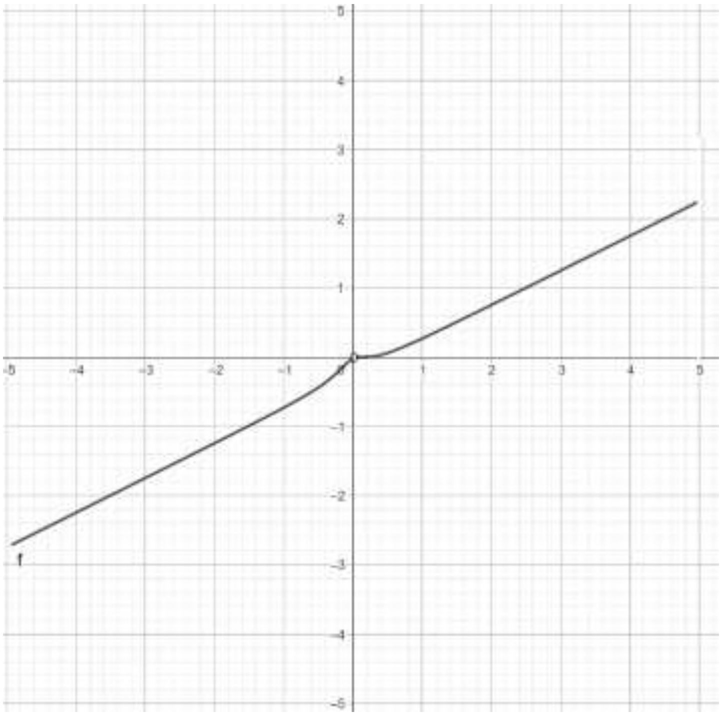
1) a)



b) f n'est pas définie en 0 *car elle a l'interdiction du dénominateur nul ; mais elle admet comme c'est clair par lecture du graphe une limite finie en* 0 *égale à* 1

c'est une limite usuelle du cours $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

2) a)



b) f n'est pas définie en 0 *car elle a l'interdiction du dénominateur nul ; mais elle admet comme c'est clair par lecture du graphe une limite finie en* 0 *égale à* 0

On peut calculer sa limite $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

<u>EXERCICE 3</u>

Déterminer les limites en $+\infty$ *et* $-\infty$ *des fonctions suivantes :*

1) $f(x)=5x^3-3x+1$

2) $f(x)=3x-5+\frac{2}{x+2}$

3) $f(x)=-2x^4+x^2+3$

4) $f(x)=1+\frac{1}{e^x}-2e^x$

<u>Correction</u>

1) ► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 - 3x + 1$ *présente une forme indéterminée*

Donc on factorise par le facteur dominant ; d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x^3\left(1 - \frac{3}{5x^2} + \frac{1}{5x^3}\right) = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{5x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{5x^3} = 0$

► $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 - 3x + 1$ *présente une forme indéterminée*

Donc on factorise par le facteur dominant ; d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5x^3\left(1 - \frac{3}{5x^2} + \frac{1}{5x^3}\right) = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{5x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{5x^3} = 0$

2) ► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x - 5 + \frac{2}{x+2} = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - 5 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x+2} = 0$

► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x - 5 + \frac{2}{x+2} = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - 5 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x+2} = 0$

3) ► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4 + x^2 + 3$ *présente une forme indéterminée*

Donc on factorise par le facteur dominant ; d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x^4\left(1 + \frac{1}{-2x^2} + \frac{3}{-2x^4}\right) = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{-2x^4} = 0$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
WhatsApp : 0717467136

► $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4 + x^2 + 3$ *présente une forme indéterminée*

Donc on factorise par le facteur dominant ; d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^4\left(1+\frac{1}{-2x^2}+\frac{3}{-2x^4}\right) = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{-2x^4} = 0$

4) ► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{e^x} - 2e^x = -\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} -2e^x = -\infty$

► $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{e^x} - 2e^x = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

EXERCICE 4

Déterminer D_f *des fonctions f suivantes puis les limites aux bornes de* D_f .

1) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-x}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

3) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{3-5e^x}{1+2e^x}$

Correction

1) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-x}$ *;* $D_f = \{x\in\mathbb{R} / 1-x \neq 0\}$

$$= \{x\in\mathbb{R} / x \neq 1\}$$

$$=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}-1\right)} = +\infty \quad (car \ \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}-1\right)} = -\infty \quad (car \ \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0)$$

- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+3}{1-x} = +\infty \qquad (car \ \lim\limits_{x\to1^-}(1-x) = 0^+)$

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+3}{1-x} = -\infty \qquad (car \ \lim\limits_{x\to1^+}(1-x) = 0^-)$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $car \ (\forall x\in\mathbb{R});\ x^2+1\neq 0)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -\infty \qquad (car \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0)$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty \qquad (car \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0)$$

3) ► $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{(x+3)^2}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2+6x+9}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)} = 0 \, (car \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0)$$

► $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{(x+3)^2}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2+6x+9}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)} = 0 \; \left(car \; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0\right)$$

4) ► $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3-5e^x}{1+2e^x} = 3 \; \left(car \; \lim_{x \to -\infty} e^x = 0\right)$

► $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3-5e^x}{1+2e^x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{3}{e^x}-5\right)e^x}{\left(\frac{1}{e^x}+2\right)e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{3}{e^x}-5\right)}{\left(\frac{1}{e^x}+2\right)} = \frac{-5}{2} \quad \left(car \; \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty\right)$$

EXERCICE 5

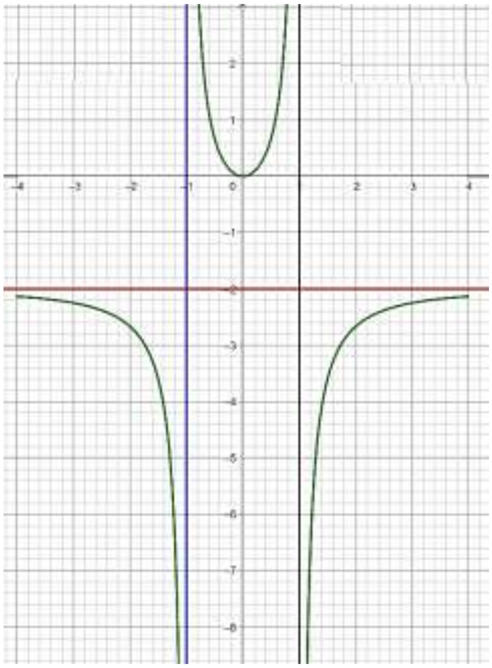
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ *par :* $f(x) = \frac{2x^2}{(1+x)(1-x)}$

1) Tracer f sur $x \in [-4;4]$ *et* $y \in [-10;10]$*: graduations* 1 *sur* (Ox) *et* 2 *sur* (Oy).
Conjecturer les limites en $\pm\infty$ *et* ± 1.

2) Démontrer ces conjectures

Correction

1)



On conjecture que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ *et que* $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

2) On a : ▶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{(1+x)(1-x)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-x^2}=-2$$

▶ *De même* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

▶ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x^2}{(1+x)(1-x)}=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-1^+}(1-x)=0^+\right)$

▶ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^2}{(1+x)(1-x)}=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0^+\right)$

EXERCICE 6

Déterminer les limites suivantes à l'aide du théorème de composition :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x^2+5}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$

4) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$

7) $\lim\limits_{x \to -5^-} e^{\frac{-2}{x+5}}$ *et* $\lim\limits_{x \to -5^+} e^{\frac{-2}{x+5}}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{e^{-x+4}}$

Correction

1) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 + x^2 + x = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ *(car* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$*)*

Et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto -x^3 + x^2 + x$ *et* $X \mapsto \sqrt{X}$ *on obtient* $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x} = +\infty$

2) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 + 5 = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2\left(1 - \dfrac{5}{x^2}\right) = -\infty$ *(car* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$*)*

Et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto -2x^2 + 5$ *et* $X \mapsto e^X$ *on obtient*

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x^2+5} = 0$

3) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 0 \quad \textit{(car } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0\textit{)}$$

Et $\sqrt{0}=0$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto \dfrac{-x+1}{x^2+1}$ *et* $X \mapsto \sqrt{X}$ *on obtient*

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to-1^+} \sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}}$

On a : $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to-1^+} 1-x^2 = 0^+$ *)*

Et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ *et* $X \mapsto \sqrt{X}$

On obtient $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$

5) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi x+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(\pi+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\pi+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \pi \quad \textit{(car } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\textit{)}$$

Et $\cos(\pi) = -1$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto \dfrac{\pi x+1}{x+2}$ *et* $X \mapsto \cos(X)$

On obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right) = -1$

6) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ *(car* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *)*

Et $\cos(0) = 1$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto \dfrac{1}{e^x}$ *et* $X \mapsto \cos(X)$

On obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = 1$

7) $\lim\limits_{x\to-5^-} e^{\frac{-2}{x+5}}$ *et* $\lim\limits_{x\to-5^+} e^{\frac{-2}{x+5}}$

► *On a :* $\lim\limits_{x\to -5^-} \frac{-2}{x+5} = +\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to -5^-} x+5 = 0^-$ *)*

Et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^X = +\infty$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto \frac{-2}{x+5}$ *et* $X \mapsto e^X$

On obtient $\lim\limits_{x\to -5^-} e^{\frac{-2}{x+5}} = +\infty$

► *On a :* $\lim\limits_{x\to -5^+} \frac{-2}{x+5} = -\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to -5^+} x+5 = 0^+$ *)*

Et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^X = 0$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto \frac{-2}{x+5}$ *et* $X \mapsto e^X$

On obtient $\lim\limits_{x\to -5^+} e^{\frac{-2}{x+5}} = 0$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{e^{-x+4}}$

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^4 \times e^{-x} = 0$ *(car* $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ *)*

Et $\sqrt{0} = 0$ *; donc par composition des fonctions* $x \mapsto e^{-x+4}$ *et* $X \mapsto \sqrt{X}$

On obtient $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{e^{-x+4}} = 0$