Exercices n° 12 « Fonction Exponentielle

EXERCICE 1

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur IR par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$ *. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O. Pour tout réel x positif ou nul, on note : M le point de C de coordonnées* $(x; f(x))$ *; P le point de coordonnées* $(x;0)$ *et Q le point de coordonnées* $(0; f(x))$.

Exprimer l'aire du rectangle OPMQ en fonction de x.

Partie B

Soit g la fonction g définie sur R par $g(x)=e^x-xe^x+1$.

1. Etudier les variations de la fonction g.

2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ *admet dans IR une seule solution α. Donner un encadrement d'amplitude* 10^{-2} *de α.*

c. Démontrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ *.*

d. Déterminer le signe de $g(x)$ *en fonction de*

Partie C

Soit h la fonction définie et dérivable sur IR par : $h(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$ *.*

Démontrer que pour tout réel x, $h'(x)$ *a le même signe que* $g(x)$.

En déduire les variations de la fonction h.

Partie D

1. Montrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α. Déterminer un encadrement de cette aire maximale.

2. Supposons alors que M a pour abscisse α. La tangente T en M à la courbe C est-elle parallèle à la droite (PQ).

CORRECTION

Partie A

$f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$ *Pour tout réel x positif ou nul, on note : M le point de C de coordonnées* $(x; f(x))$ *P le point de coordonnées* $(x;0)$ *et Q le point de coordonnées* $(0; f(x))$.
En utilisant les coordonnées des points O, P, M et Q et sachant que le repère est orthonormé on a $OP = x\ (x>0)$ *et* $OQ = f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$ *1 Ainsi l'aire du rectangle OPMQ est* $OP\times OQ=\dfrac{4x}{e^x+1}$.

Partie B

$g(x)=e^x-xe^x+1$

1. g est une fonction dérivable sur IR comme somme et produit de fonctions dérivables sur IR.
Soit $x\in IR$, $g'(x)=e^x-\left(1\times e^x+x\times e^x\right)=-xe^x$. *Puisque* $e^x>0$ *sur IR, le signe de* $g'(x)$ *est le signe opposé à x. Ainsi, sur* $]-\infty;0[$ $g'(x)>0$ *pour x = 0,* $g'(x)=0$ *, et sur* $]0;+\infty[$ $g'(x)<0$. *La fonction g est donc strictement croissante sur* $]-\infty;0[$ *puis strictement décroissante sur* $]0;+\infty[$.

2. a. ⊛ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ *: On sait que* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$. *Ainsi,* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$

⊛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$*: On est en présence d'une forme indéterminée. Au voisinage de* $+\infty$*,*
$g(x)=e^x(1-x)+1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ *par produit et somme on obtient*
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

b. Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		*0*		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	*0*		-		
$g(x)$	*1*	↗	*2*	↘	*0*	↘	$-\infty$

$g(0)=e^0 - 0e^0+1=2$

■*g est continue et strictement croissante sur* $]-\infty;0]$ *.L'image de l'intervalle* $]-\infty;0]$ *par g est l'intervalle* $]1;2]$. *Or,* $0\notin\,]1;2]$. *L'équation* $g(x)=0$ *n'admet pas de solution sur* $]-\infty;0]$.

■g est continue sur IR car elle est dérivable sur IR. g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ L'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ par g est l'intervalle $]-\infty;2]$.
Or, $0 \in]-\infty;2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$. On en déduit que l'équation $g(x)=0$ admet exactement une solution α dans IR. On a $g(1,27) \approx 0,03 > 0$ $g(\alpha)=0$ et $g(1,28) \approx -0,007 < 0$ donc $1,27 < \alpha < 1,28$

c. $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}(1-\alpha) = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

d. En utilisant le tableau de variation de la fonction g, on a : $g(x) > 0$ pour $x \in]-\infty;\alpha[$ $g(x)=0$ pour $x=\alpha$ et $g(x)<0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$

Partie C

$$h(x) = \frac{4x}{e^x+1}.$$

h est une fonction dérivable sur IR $(e^x+1 \neq 0 \quad \forall x \in IR)$ comme quotient de fonctions dérivables.

Soit $x \in IR$: $h'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4e^x + 4 - 4xe^x}{(e^x+1)^2}$

$$= \frac{4(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

Ainsi, $\forall x \in IR$; $h'(x) = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$.

Mais, $(e^x+1)^2 > 0$ sur IR donc $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur IR. En utilisant le signe de $g(x)$ déterminé à la question

Partie B -2.d. on peut dire que h est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Partie D

1. D'après la partie A -, l'aire du triangle OPMQ est $h(x)$ pour tout réel $x > 0$. En utilisant les variations de la fonction h, h admet un maximum en $\alpha\ (\alpha > 0)$, c'est-à dire

lorsque M a pour abscisse α

$$h(\alpha)=\frac{4\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}\left(\ car\ e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\right)$$

$$=\frac{4\alpha}{\frac{\cancel{1}+\alpha-\cancel{1}}{\alpha-1}}$$

$$=\frac{4\cancel{\alpha}(\alpha-1)}{\cancel{\alpha}}$$

$$=4(\alpha-1)$$

$$Mais\ 1,27<\alpha<1,28\Rightarrow 1,08<4(\alpha-1)<1,12$$

$$\Rightarrow\ 1,08<h(\alpha)<1,12$$

Supposons alors que M a pour abscisse α. La tangente T en M à la courbe C est parallèle à la droite (PQ) *si, et seulement si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux. Le coefficient directeur de la tangente T en M à la courbe C est* $f'(\alpha)$. *f est dérivable sur IR comme quotient de fonctions dérivables, et pour* $x\in IR$ *x* ∈*R* $f'(x)=\frac{-4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$ *Sachant que* $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$,

$$f'(\alpha)=\frac{-4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^{2}}$$

$$f'(\alpha)=\frac{-4\times\frac{1}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{\frac{-4}{\alpha-1}}{\left(\frac{\cancel{1}+\alpha-\cancel{1}}{\alpha-1}\right)^{2}}$$

$$=-\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^{2}}$$

Le coefficient directeur de la droite (PQ) *est :* $\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{f(\alpha)-0}{0-\alpha} = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

d'où $-\dfrac{\dfrac{4}{e^{\alpha}+1}}{\alpha} = \dfrac{-4}{\alpha(e^{\alpha}+1)} = \dfrac{-4}{\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$ *On en déduit que les deux droites sont parallèles lorsque M a pour abscisse α.*