Exercice 1 :

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie :

Dans l'anneau $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$: $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(On pose : $A^0=I$; $A^1=A$; $A^2=A\times A$ et $A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\ldots\times A}_{n\,fois}$ pour tout n de)

1- Montrons par récurrence que : $(\forall k\in\mathbb{N})$; $A^{2k}=I$

Pour k=0

On a : $A^0=I$

Soit k ∈N

Supposons que $A^{2k}=I$; et montrons que : $A^{2(k+1)}=I$

On a : $A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2&\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2&0\\\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2&\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

Donc $A^2 = I$ et $A^{2k} = I$; d'où $A^{2(k+1)} = I$

Conclusion $(\forall k \in \mathbb{N})$; $A^{2k} = I$

2-Montrons que A admet une matrice inverse A^{-1}.

D'après ce qui précède on a : $A^2 = I$; donc $A \times A = I$

D'où A admet une matrice inverse A^{-1} et $A^{-1} = A$

Deuxième partie :

Soit α un nombre réel.

Pour tout x et y de l'intervalle $\mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$ on pose : $x * y = (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

1- a) Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$

Soient x et y deux éléments de $\mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$.

On a : $x > \alpha$ et $y > \alpha$; donc $x - \alpha > 0$ et $y - \alpha > 0$

Par suite $(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha > \alpha$; d'où $(x * y) \in \mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$

Donc $*$ est une loi de composition interne dans $\mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$

b) • Soient x et y deux éléments de $\mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$.

On a : $x * y = (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha = (y-\alpha)(x-\alpha)+\alpha = y * x$

Donc la loi $*$ est commutative.

• Soient x ; y et z des éléments de $\mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } (x*y)*z &= \left((x*y)-\alpha\right)(z-\alpha)+\alpha \\
&= \left((x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha-\alpha\right)(z-\alpha)+\alpha \\
&= \left((x-\alpha)(y-\alpha)\right)(z-\alpha)+\alpha \\
&= (x-\alpha)\left((y-\alpha)(z-\alpha)\right)+\alpha \\
&= (x-\alpha)\left(\underbrace{(y-\alpha)(z-\alpha)+\alpha}_{y*z}-\alpha\right)+\alpha \\
&= (x-\alpha)\left((y*z)-\alpha\right)+\alpha \\
&= x*(y*z)
\end{aligned}$$

Donc pour tous x ; y et z éléments de $\mathrm{I} = \left]\alpha ; +\infty\right[$; on a : $(x*y)*z = x*(y*z)$.

Par suite la loi $*$ est associative.

c) Montrons que $(\mathrm{I}, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

Posons e l'élément neutre pour la loi $*$ dans I.

$$\begin{aligned}
\text{On a pour tout } x \in \mathrm{I} \text{ ; } x * e = x &\Leftrightarrow (x-\alpha)(e-\alpha)+\alpha = x \\
&\Leftrightarrow x(e-\alpha)-\alpha(e-\alpha)+\alpha = x \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} e-\alpha = 1 \\ -\alpha(e-\alpha)+\alpha = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow e = 1+\alpha
\end{aligned}$$

D'où $(\mathrm{I}, *)$ admet un élément neutre $e = 1+\alpha$

2- Montrons que $(\mathrm{I},*)$ est un groupe commutatif.

Soient x et x' deux élément de I ; on a : $x*x'=e \Leftrightarrow (x-\alpha)(x'-\alpha)+\alpha=1+\alpha$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x'-\alpha)=1$$

$$\Leftrightarrow x'=\frac{1}{x-\alpha}+\alpha$$

Et $x>\alpha$; donc $\frac{1}{x-\alpha}+\alpha>\alpha$

Par suite $x'\in\mathrm{I}$

D'où tout élément x de I admet un inverse dans I.

Comme $*$ est une loi de composition interne commutative ; associative et admet un élément neutre dans I ; alors $(\mathrm{I},*)$ est un groupe commutatif.

3- On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{l} \mathrm{I}\mapsto\mathbb{R}^* \\ x\mapsto \frac{1}{x-a}\end{array}$

a) Montrons que φ est un isomorphisme de $(\mathrm{I},*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

- Soient x et y deux élément de I ; on a : $\varphi(x*y)=\frac{1}{(x*y)-\alpha}$

$$=\frac{1}{(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha-\alpha}$$

$$=\frac{1}{x-\alpha}\times\frac{1}{y-\alpha}$$

$$=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

Donc pour tout x et y de I ; on a : $\varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

D'où φ est un homomorphisme de $(\mathrm{I},*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

- Soit y un élément de IR_+^* ; on a : $y=\varphi(x)\Leftrightarrow y=\frac{1}{x-\alpha}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}+\alpha$$

Et comme $y>0$; alors $\frac{1}{y}+\alpha>\alpha$

D'où pour tout y de IR_+^*; il existe un élément unique $x=\frac{1}{y}+\alpha$ de I tel que $y=\varphi(x)$

Par suite φ est un isomorphisme de $(\mathrm{I},*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

b) Résolvons dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ où $x^{(3)}=x*x*x$

On a : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha \Leftrightarrow \varphi\left(x^{(3)}\right)=\varphi\left(\alpha^3+\alpha\right)$

$$\Leftrightarrow \varphi(x*x*x)=\varphi(\alpha^3+\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x)\times\varphi(x)\times\varphi(x)=\frac{1}{\alpha^3+\alpha-\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^3=\frac{1}{\alpha^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-\alpha}=\frac{1}{\alpha} \qquad (car\ \alpha>0\ )$$
$$\Leftrightarrow x=2\alpha$$

D'où l'équation $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ admet une unique solution $x=2\alpha$

Exercice 2 :

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N=\underbrace{1\,11.........1}_{2010\,fois}$

1- Montrons que le nombre N est divisible par 11

On a : $N=\underbrace{1\,11.........1}_{2010\,fois} \Leftrightarrow N=1+10+10^2+10^3+\cdots+10^{2009}$

Donc N est la somme des 2010 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q=10$

D'où $N=\dfrac{10^{2010}-1}{10-1}$

Et $10\equiv -1[11] \Rightarrow 10^{2010}\equiv (-1)^{2010}[11]$

$\Rightarrow 10^{2010}\equiv 1[11]$

$\Rightarrow 10^{2010}-1\equiv 0[11]$

Comme $9\wedge 11=1$ alors $\dfrac{10^{2010}-1}{9}\equiv 0[11]$ (car $\dfrac{10^{2010}-1}{9}$ est un entier naturel)

D'où $N\equiv 0[11]$; càd que le nombre N est divisible par 11.

On peut remarquer aussi que : $1\equiv 1[11]$

$10\equiv -1[11]$

$10^2\equiv 1[11]$

$10^3\equiv -1[11]$

$\vdots$

$\vdots$

$10^{2009}\equiv -1[11]$

D'où $N\equiv (1+(-1)+1+(-1)+\cdots+1+(-1))[11]$

Donc $N\equiv 0[11]$

2- a) Vérifions que le nombre 2011 est premier et que $10^{2010}-1=9N$

Les nombres premiers dont les carrés sont plus petits ou égale à 2011 ; sont : $2;3;5;\cdots;43$ est aucun de ses nombres ne divise 2011 ; donc le nombre 2011 est premier .

D'après la question 1- on a : $N=\dfrac{10^{2010}-1}{10-1}$; donc $10^{2010}-1=9N$

b) Montrons que le nombre 2011 divise le nombre $9N$

le nombre 2011 est premier et $2011\wedge 9=1$

Donc d'après le petit Théorème de FERMAT on a : $10^{2010}-1\equiv 0[2011]$

Et comme $10^{2010}-1=9N$; alors $9N\equiv 0[2011]$

Par suite 2011 divise le nombre $9N$

c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N.

On a : $2011\wedge 9=1$ et $2011/9N$; donc d'après le théorème de GAUSS 2011 divise le nombre N càd $N\equiv 0[2011]$.

3- Montrons que le nombre N est divisible par 22121

On a : $22121=11\times 2011$

Comme $N\equiv 0[11]$; $N\equiv 0[2011]$ et $2011\wedge 11=1$

Alors $N\equiv 0[11\times 2011]$

D'où $N\equiv 0[22121]$

Donc le nombre N est divisible par 22121

<u>**Exercice 3**</u> :

<u>**Première partie :**</u>

Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$(E_m) : z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$

1-Vérifions que le nombre $z_1=-m+2$ est solution de l'équation (E_m)

On a : $$(-m+2)^2+[(1-i)m-4](-m+2)-im^2-2(1-i)m+4$$
$$=m^2-4m+4-m^2+im^2+4m+2m-2im-8-im^2-2m+2im+4=0$$

Donc le nombre $z_1=-m+2$ est solution de l'équation (E_m)

2- Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m)

a) Montrons que : $z_1z_2=1 \iff im^2+2(1-i)m-3=0$

On sait que : $z_1z_2=\dfrac{-im^2-2(1-i)m+4}{1}$

Donc $z_1z_2=1 \iff -im^2-2(1-i)m+4=1$

$\iff im^2+2(1-i)m-3=0$

b) Déterminons les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1z_2=1$

Ceci revient à résoudre l'équation $(E') : im^2+2(1-i)m-3=0$ d'inconnue m.

Le discriminant réduit de l'équation est :

$$\delta=(1-i)^2+3i=i=\frac{1}{2}\times 2i=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)\right)^2$$

Donc les solutions de l'équation (E') sont :

$$m=\frac{-(1-i)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i} \quad et \quad m=\frac{-(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i}$$

D'où les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1z_2=1$; sont :

$$m=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i \quad et \quad m=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

Deuxième partie :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère l'application S qui au point M, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z'-1=-(z-1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$,et soit z'' l'affixe du point $M''=R(M)$.

1- a) Montrons que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

Soit $I(1)$; on a : $S(M(z))=M'(z') \Leftrightarrow z'-1=-(z-1)$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{IM'}}=-z_{\overrightarrow{IM}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$$

D'où S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

b) Montrons que : $z''=iz+2$.

On a : $M''=R(M) \Leftrightarrow z''=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1-i)+1+i$

$$\Leftrightarrow z''=i(z-1-i)+1+i$$

$$\Leftrightarrow z''=iz-i+1+1+i$$

$$\Leftrightarrow z''=iz+2$$

Donc $z''=iz+2$

2- Soit A le point d'affixe 2.

On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

a) On a : • $\frac{z''-2}{z'-2}=\frac{iz}{-(z-1)-1}=-i$

$$• \quad \frac{z''-2}{z'-2}=-i \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z''-2}{z'-2}\right|=1 \\ arg\left(\frac{z''-2}{z'-2}\right)\equiv\frac{-\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM'' = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM''};\overrightarrow{AM'}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'où le triangle AM'M" est rectangle isocèle en A.

b) Soit M un points du plan différent de O et de Ω

A, Ω , M' et M" sont différents.

On a : • A, Ω, M' et M" sont cocycliques $\Leftrightarrow \dfrac{z''-2}{z'-2} \times \dfrac{z'-1-i}{z''-1-i} \in IR$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1+i}{z-1-i} \in IR$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1+i}{z-1-i} = \overline{\left(\frac{z-1+i}{z-1-i}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z+\overline{z} = 2$$

$$\Leftrightarrow Re(z) = 1$$

• Dans le cas où $M = \Omega$; on a : $aff(M') = (1-i)$ et $M'' = \Omega$

Et A, Ω, $M'(1-i)$ sont non alignés donc A, Ω, M' et M" sont cocycliques.

Par suite l'ensemble des points M tels que A, Ω, M' et M" sont cocycliques est la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 4 :(6.5points)

Première partie :

Etude des solutions positives de l'équation (E) : $e^x = x^n$ avec n un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D = [0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- Pour tout x de l'ensemble $]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a : $n = f(x) \Leftrightarrow n = \dfrac{x}{\ln x}$

$$\Leftrightarrow x = n\ln x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln x^n$$

$$\Leftrightarrow e^x = x^n$$

2- Montrons que la fonction f est dérivable à droite en 0.

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x}{\ln x}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \ \ (car \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty)$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0)=0$.

3- • $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$ (car pour $x<1$; $\ln x<0$)

• $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$ (car pour $x>1$; $\ln x>0$)

<u>***Interprétation géométrique***</u>

(C) admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}}=+\infty$ (car pour $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$)

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x}{\ln x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$ (car pour $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

<u>***Interprétation géométrique***</u>

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

4-Etudie de variations de la fonction f.

f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$; et on a :

Pour tout x de $]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a : $f'(x)=\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'$

$$=\frac{\ln x-x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

Donc $f'(x)$ est du même signe que $(\ln x-1)$

D'où $f'(x)<0$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]0,e]$; et $f'(x)>0$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$.

Par suite f est décroissante sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]0,e]$; est croissante sur l'intervalle $[e;+\infty[$.

<u>***Tableau de variations de f***</u>

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

5-Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Pour tout x de $]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$; donc f' est dérivable sur

$]0,1[\cup]1,+\infty[$ et on a : $f''(x)=\dfrac{\dfrac{(\ln x)^2}{x}-(\ln x-1)\times\dfrac{2\ln x}{x}}{(\ln x)^4}$

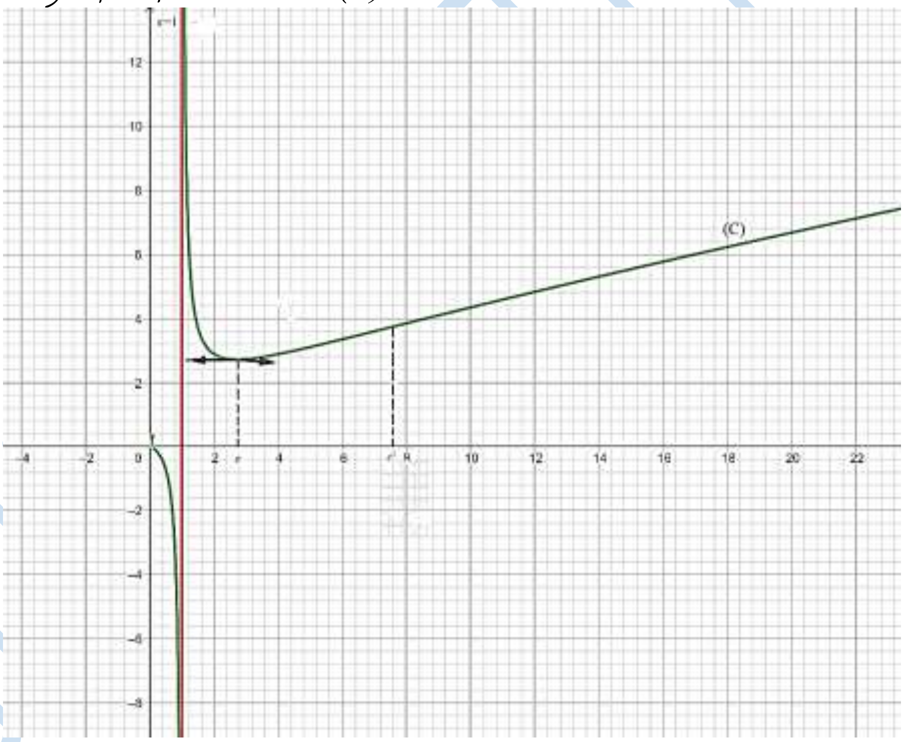
$$=\frac{(\ln x)^2-2(\ln x)^2+2\ln x}{x(\ln x)^4}$$

$$=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x(\ln x)^4}$$

$$=\frac{\ln x}{x(\ln x)^4}(2-\ln x)$$

D'où $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=e^2$; donc le point $\left(e^2;\dfrac{e^2}{2}\right)$ est le seul point d'inflexion pour (C).

6- Représentation graphiquement de (C) .



7-Montrons que pour $n\geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1<a_n<e<b_n$

Supposons que $n\geq 3$

- la fonction f est continue sur $[0;1[$ et $f([0;1[)=]-\infty;0]$; comme $n\notin]-\infty;0]$; alors (E) n'admet pas de solution dans $[0;1[$.
- la fonction f est continue ; strictement décroissante sur $]1;e]$ et $f(]1;e])=[e;+\infty[$; comme $n\in[e;+\infty[$; alors (E) admet une unique solution a_n dans $]1;e]$.

• la fonction f est continue ; strictement croissante sur $[e;+\infty[$ et $f([e;+\infty[)=[e;+\infty[$; comme $n\in[e;+\infty[$; alors (E) admet une unique solution b_n dans $[e;+\infty[$.

D'où pour $n\geq 3$, l'équation $(E): f(x)=n$ admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1<a_n<e<b_n$.

Deuxième partie :

Etude des deux suites $(a_n)_{n\geq 3}$ et $(b_n)_{n\geq 3}$

1-Montrons que : $(\forall n\geq 3)\ \ b_n\geq n$

$$On\ a : f(b_n)=n \Leftrightarrow \frac{b_n}{\ln b_n}=n$$
$$\Leftrightarrow b_n=n\ln b_n$$

Et $b_n\geq e \Leftrightarrow \ln b_n\geq 1 \Leftrightarrow n\ln b_n\geq n$

Donc $(\forall n\geq 3)\ \ b_n\geq n$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$

2- a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

Pour $n\geq 3$; on a : $f(a_n)=n$ et $f(a_{n+1})=n+1$; donc $f(a_{n+1})>f(a_n)$

et comme f est strictement décroissante sur $]1;e]$; $a_n\in]1;e]$ et $a_{n+1}\in]1;e]$

alors $a_{n+1}<a_n$; par suite la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

b) Montrons que : $(\forall n\geq 3)\ \ \frac{1}{n}<\ln(a_n)<\frac{e}{n}$

$$Pour\ n\geq 3\ ; on\ a : f(a_n)=n \Leftrightarrow \frac{a_n}{\ln a_n}=n$$
$$\Leftrightarrow a_n=n\ln a_n$$

Et comme $1<a_n<e$

Alors $1<n\ln a_n<e \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\ln a_n<\frac{e}{n}$

Donc $(\forall n\geq 3)\ \ \frac{1}{n}<\ln a_n<\frac{e}{n}$

On en déduit que : $e^{\frac{1}{n}}<a_n<e^{\frac{e}{n}}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{e}{n}}=1$

Alors par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$

c)Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n=e$

a_n est solution de l'équation $f(a_n)=n$

Donc $\dfrac{a_n}{\ln a_n} = n \Leftrightarrow a_n = n\ln a_n \Leftrightarrow e^{a_n} = a_n^n$; et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

Comme la fonction exponentielle est continue en 1 ; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} = e$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = e$

<u>Exercice 5</u> : (3.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

1- a) Montrons que : $(\forall x \geq 0)\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

Soit $x \geq 0$; on a : $0 \leq t \leq x \Leftrightarrow -x^2 \leq -t^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq e^{-2x^2} \leq e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \leq e^{-x^2}\int_0^x dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$$

Donc $(\forall x \geq 0)\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

b) Montrons que : $(\forall x \geq 1)\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$

- Soit $x \geq 1$; on a : $x^2 \geq x \Leftrightarrow -x^2 \leq -x$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

D'où $(\forall x \geq 1)\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$

- On a : $(\forall x \geq 1)\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ et $(\forall x \geq 0)\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

Donc $(\forall x \geq 1)$; $0 \leq F(x) \leq xe^{-x}$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Donc par comparaison on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

2-Montrons que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que :

$F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$; donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ est dérivable sur $[0;+\infty[$; d'où F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a :

$$F'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + \left(e^{-x^2}\right)^2$$

$$= -2xF(x) + e^{-2x^2}$$

Donc $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

3- On considère la fonction numérique G définie sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$Par : \begin{cases} G(x) = F(\tan x) & ; 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

a) Montrons que la fonction G est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(\tan x)$$

On pose : $X = \tan x$; alors $x \to \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^- \Rightarrow X \to +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} F(X) = 0$ et $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Alors $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; par suite G est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$

b) Montrons qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que : $F'(c) = 0$ et que : $F(c) = \dfrac{e^{-2c^2}}{2c}$

La fonction G est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$;de plus on a :

$G(0) = G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; donc d'après le théorème de ROLL : $\left(\exists c' \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$; $G(c') = 0$

Donc $\left(\exists c' \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$; $\left(1 + tng^2(c')\right) \times F'\left(tang(c')\right) = 0$

Comme $1 + tng^2(c') \ne 0$; $\left(\exists c' \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right) / F'\left(tang(c')\right) = 0$ et

$c' \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow tang(c') \in]0; +\infty[$

D'où $\left(\exists c = tang(c') \in]0, +\infty[\right) / F'(c) = 0$

4- On considère la fonction numérique H définie sur $]0,+\infty[$ par : $H(x) = F'(x) \times \dfrac{e^{x^2}}{2x}$

a) Montrons que la fonction H est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

Pour tout on a : $H(x) = F'(x) \times \dfrac{e^{x^2}}{2x} \Leftrightarrow H(x) = \left(e^{-2x^2} - 2xF(x)\right) \times \dfrac{e^{x^2}}{2x}$

$$\Leftrightarrow H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - e^{x^2} F(x)$$

$$\Leftrightarrow H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - e^{-x^2} \times e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$\Leftrightarrow H(x)=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

D'où $H'(x)=\dfrac{-4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}}{4x^2}-e^{-x^2}$

$$=\frac{-8x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}}{4x^2}<0$$

Donc H est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

b) En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variation de F.

On a : $H(x)=F'(x)\times\dfrac{e^{x^2}}{2x}$

Donc $H(x)=0\Leftrightarrow F'(x)=0$; et $(\exists c\in]0,+\infty[)/F'(c)=0$

D'où $(\exists c\in]0,+\infty[)/H(c)=0$

H est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$; donc $(\exists! c\in]0,+\infty[)/H(c)=0$

<u>Les variations de F</u>

Pour tout $x\in]0,+\infty[$; $H(x)=F'(x)\times\dfrac{e^{x^2}}{2x}$

Donc $F'(x)$ est du même signe que $H(x)$

- Pour $x\in]0;c]$; on a : $x\le c\Rightarrow H(x)\ge H(c)$ et $H(c)=0$

Donc $H(x)\ge 0\Rightarrow F'(x)\ge 0$

- Pour $x\in[c;+\infty[$; on a : $x\ge c\Rightarrow H(x)\le H(c)$ et $H(c)=0$

Donc $H(x)\le 0\Rightarrow F'(x)\le 0$

<u>Tableau de variations de F</u>

x	0		c		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e^{-2c^2}}{2c}$	$\searrow$	0

$F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)\Rightarrow F(c)=\dfrac{e^{-2c^2}}{2c}$