Examen national 2013
session de rattrapage

Exercice 1 : (3,5 points)

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I :

Pour tous x et y de l'intervalle $G =]1;2[$ on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0,50 pt 1- Montrer que : $*$ est une loi de composition interne sur G.

2. On rappelle que $(IR_+^*,\times)$ est un groupe commutatif. On considère l'application f de IR_+^* dans G définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$

0,75 pt a) Montrer que f est un isomorphisme de $(IR_+^*,\times)$ dans $(G,*)$.

0,50 pt b) En déduire que $(G,*)$ est groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

Partie II :

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nul $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathcal{M}_3(IR),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose : $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

0,50 pt 1) a) Vérifier que : $A^3=O$, puis en déduire que A est un diviseur de zéro dans $(\mathcal{M}_3(IR),+,\times)$.

0,50 pt b) Vérifier que : $(A^2-A+I)(A+I)=I$ puis en déduire que la matrice $A+I$ admet un inverse dans $(\mathcal{M}_3(IR),+,\times)$ à déterminer.

0,75 pt 2) Pour tous a et b de IR on pose : $M(a;b)=a.I+b.A$, et on considère l'ensemble

$E=\{M(a;b)/(a;b)\in IR^2\}$

Montrer que l'ensemble $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel dont on déterminera une base.

Exercice 2 : (3 points)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

I. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre des boules noir tirées de l'urne.

1,00 pt 1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

0,50 pt 2) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

II. On effectue l'expérience de trois étapes suivantes :

Étape 1 : On tire une boule de l'urne, on note sa couleur puis on le remettra dans l'urne.

Étape 2 : On rajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à la première étape.

Étape 3 : On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne qui contient 12 boules après la deuxième étape.

On considère les événements suivants :
N :" la boule tirée à la première étape est noir".
R :" la boule tirée à la première étape est rouge".
E :" les 3 boules tirée à la seconde étape sont noirs".

0,50 pt 1) Montrer que : $P(E\cap N)=\frac{12}{55}$

0,50 pt 2) Calculer $P(E)$.

0,50 pt 3) Calculer la probabilité de l'événement R sachant que l'événement E a était réalisé.

Exercice 3 : (3,5 points)

Partie I :

Soit a un nombre complexe différent de 1 .

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):2z^2-2(a-1)z+(a-1)^2=0$

0,50 pt 1) Montrer que : $z_1=\frac{(a-1)}{2}(1+i)$ et $z_2=\frac{(a-1)}{2}(1-i)$ sont les deux solutions de l'équation (E).

2) On prend $a=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$.

0,50 pt a) Montrer que : $a-1=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$.

1,00 pt b) En déduire la forme trigonométrique des nombres z_1 et z_2.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Supposons que $\mathrm{Re}(a)<0$, on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$

0,50 pt 1) Déterminer les affixes des points J et K les milieux de $[AC]$ et $[AB]$ respectivement en fonction de a.

0,50 pt 2) Soient $r_1=R\left(J,\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2=R\left(K,\frac{\pi}{2}\right)$.

On pose $A'=r_2(A)$ et $C'=r_1(C)$; soient a' et c' les affixes respectifs des points A' et C' .

Montrer que $a'=z_1$ et $c'=z_2$.

0,50 pt 3) Calculer $\frac{a'-c'}{a-1}$ puis en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$.

Exercice 4 : (8,25 points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0)=1$ et $(\forall x>0)$;

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2(x)}}$$

0,50 pt 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

0,50 pt b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. (vous pouvez utiliser le résultat $\lim_{x\to0^+} x\ln^2(x)$)

0,50 pt c) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x>0)$; $f'(x)=\frac{-x\ln x(1+\ln x)}{(1+x^2\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

0,50 pt d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) Soit F la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

Et soit (C_F) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,25 pt a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$.

0,50 pt b) Montrer que: $(\forall t \geq e)$; $t\ln t \leq \sqrt{1+t^2\ln^2 t} \leq \sqrt{2}\, t\ln t$.

0,75 pt c) Montrer que : $(\forall x \geq e)$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) \leq \displaystyle\int_e^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2 t}}dt \leq \ln(\ln x)$.

0,50 pt d) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$.

0,50 pt e) Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexions et déterminer leurs abscisses.

1,00 pt f) Tracer (C_F). (On admet que $F\left(\dfrac{1}{e}\right) \simeq 0,4$ et que $F(1) \simeq 0,5$)

3) Pour tout $x \in [0;+\infty[$ on pose : $\varphi(x) = x - F(x)$

0,75 pt a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ puis étudier la monotonie de la fonction φ.

0,50 pt b) Montrer que pour tout $n \in IN$ l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

0,50 pt c) Montrer que : $(\forall n \geq 1)$; $\alpha_n \geq n$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

0,50 pt 4) a) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $0 \leq \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$. (Vous pouvez utiliser le TAF)

0,50 pt b) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

__Exercice 5__ : (1,75 points)

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $u_n = \left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

0,25 pt 1) Vérifier que : $(\forall n \geq 1)$; $v_n = n^2\big(\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))\big)$.

0,50 pt 2) En utilisant le TAF montrer que : $(\forall n \geq 1)$ $(\exists c \in]n;n+1[)$; $v_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

0,50 pt 3) Montrer que : $(\forall n \geq 1)$; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

0,50 pt 4) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$