Etude de fonction ln et Exp 2BAC.SM

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et soit* f_n *la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par:* $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln x$

Partie I

1- a- Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R})$; $e^t \geq t + 1$

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ *et que :* $(\forall x \in \mathbb{R})$; $1 + (x-1)e^x \geq 0$

2- Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} f_0(x)$

3- a- Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$; $f_0'(x) = \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2} + n\ln x$

b- En déduire le sens de variation de f_0 *et dresser son tableau de variation*

Partie II

Soit (C_n) *la courbe représentative de* f_n *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Etudier les variations de f_n *sur l'intervalle 0, +*

2- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$ *et interpréter graphiquement le résultat obtenu*

3- Déterminer les positions relatives de (C_n) *et* (C_{n+1}).

4- Montrer que toutes les courbes (C_n) *passent par un point fixe que l'on déterminera*

5- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* $\alpha_n \in]0;1[$

6- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$ *et en déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$

En déduire que la suite (α_n) *est convergente.*

7- a- En utilisant la partie /, Montrer que : $\forall x \in]0;1]$: $\dfrac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1-e}{n}$

c- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$

d- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

8- Construire (C_0) *et* (C_1).

WWW.GUESSMATHS.CO

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896