



guessmaths

Session 2022 Session normale Correction Examen National baccalauréat

2ème Bac PC-SVT

Exercice 1

$A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

$A(0,1,1)$; $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \vec{i} + \vec{k}\end{aligned}$$

D'où : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

b) On en déduit que A , B et C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC) dont le vecteur $\vec{u}(1,0,1)$ est un vecteur normal d'où une équation cartésienne de (ABC) est : $x + z + d = 0$ et comme $A \in (ABC)$ alors : $0 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$.

par suite une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + z - 1 = 0$

2) (S) $(\Omega(1,1,2), R = \sqrt{2})$.

On a : $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$$

Donc une équation cartésienne de la sphère (S) est (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$

3) Calculons la distance de Ω au Plan (ABC)

$$\begin{aligned}\text{On a : } d(\Omega, (ABC)) &= \frac{|x_\Omega + z_\Omega - 1|}{\|\vec{i} + \vec{k}\|} \\ &= \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Donc $d(\Omega, (ABC)) = R$; alors le plan (ABC) est tangent à la sphère (S); et on a $A \in (S)$ est $A \in (ABC)$

Par suite A est le point de contact de (S) et le plan (ABC)

4) a) On a : (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) ; donc un vecteur normale au plan (ABC) est un vecteur directeur de (Δ) et (Δ) passe par C ; d'où une représentation paramétrique de (Δ) est

$$(\Delta) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Calculons la distance de Ω à la droite (Δ)

$$d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega C} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ et } \begin{cases} \overrightarrow{\Omega C}(-2, 0, 0) \\ \vec{u}(1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\Omega C} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{j}$$

$$\text{Donc } d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|2\vec{j}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

D'où $d(\Omega, (\Delta)) = R$; par suite la droite (Δ) est tangente à (S) ; soit $D(x_D, y_D, z_D)$ le point de contact de la droite (Δ) et la sphère (S) ; alors les coordonnées de D vérifient le système :

$$\begin{cases} x_D = -1 + t \\ y_D = 1 \\ z_D = 2 + t \\ x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 - 2x_D - 2y_D - 4z_D + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-1+t)^2 + 1^2 + (2+t)^2 - 2(-1+t) - 2 \times 1 - 4(2+t) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1$$

D'où $D(0, 1, 3)$.

c) On a : $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 1)$ et $\vec{i} + \vec{k}(1, 0, 1)$.

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k}) = -1 + 1 = 0$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AC} \perp (\vec{i} + \vec{k})$$

Ce qui signifie que C c'est la projection orthogonale de A sur (Δ) ; par suite $d(A, (\Delta)) = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$

Exercice 2

$A(a = -1 - i\sqrt{3})$; $B(b = -1 + i\sqrt{3})$ et $t(\overrightarrow{OA})$.

1) On a : $D(d) = t(\overrightarrow{OA})(B(b)) \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}$

$$\Leftrightarrow d - b = a$$

$$\Leftrightarrow d = a + b$$

$$\Leftrightarrow d = -2$$

Donc $d = -2$ est l'affixe du point D image du point B pour la translation t .

$$2) \text{ Soit } R\left(D, \frac{2\pi}{3}\right); \text{ on a : } C(c) = R(B(b)) \Leftrightarrow c - d = (b - d) e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c = (b + 2) e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2$$

$$\Leftrightarrow c = (1 + i\sqrt{3}) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) - 2$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) - 2$$

$$\Leftrightarrow c = -4$$

$$3) a) \text{ On a : } \frac{b - c}{a - c} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 4}{-1 - i\sqrt{3} + 4}$$

$$= \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)}{2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (D'après la formule de Moivre)$$

$$\text{Donc : } \frac{b - c}{a - c} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$b) \text{ D'après la question 2) on a : } \frac{c - d}{b - d} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 Et \quad \left(\frac{b-c}{a-c} \right)^2 &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 \\
 &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{c-d}{b-d}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{b-c}{a-c} \right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$$

4) $(\Gamma)(D, 2)$ et $(\Gamma')(O, 4)$

$$a) M(z) \in (\Gamma)(D, 2) \Leftrightarrow DM = 2$$

$$\Leftrightarrow |z - d| = 2$$

$$\Leftrightarrow |z + 2| = 2$$

$$b) \text{ on a : } M(z) \in (\Gamma')(O, 4) \Leftrightarrow OM = 4$$

$$\Leftrightarrow |z| = 4$$

$$\text{Posons } z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy \Rightarrow z + \bar{z} = 2x$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \begin{cases} |z| = 4 \\ |z + 2| = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ (x + 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4 = 4 \end{cases} \\
 &\Rightarrow 16 + 4x = 0 \\
 &\Rightarrow x = -4
 \end{aligned}$$

$$D'où : z + \bar{z} = -8$$

2ème Méthode

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } |z + 2| = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{(z + 2)(\bar{z} + 2)} = 2 \\
 &\Leftrightarrow (z + 2)(\bar{z} + 2) = 4 \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) + 4 = 4 \\
 &\Leftrightarrow |z|^2 + 2(z + \bar{z}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 16 + 2(z + \bar{z}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow z + \bar{z} = -8
 \end{aligned}$$

Exercice 3

On tire simultanément 3 boules de l'urne

$$\text{Donc } \text{Card}(\Omega) = C_{10}^3 = 120$$

1) A "N'obtenir aucune boule Rouge"

C.à.d tirer les 3 boules parmi les 6 boules non rouge.

$$\text{Donc : } \text{Card}(A) = C_6^3 = 20$$

$$D'où P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

2) B "Obtenir 3 boules blanches ou 3 boules Vertes"



Donc tirer les trois boules parmi les 3 boules Blanches ou tirer les 3 boules parmi les trois boules Vertes ;
d'où : $\text{Card}(B) = C_3^3 + C_3^3 = 2$

$$\text{Donc : } P(A) = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

3) C "Obtenir exactement une boule Rouge"

C.a.d tirer une boule parmi les 4 boules Rouges et tirer 2 boules 6 boules non Rouge; d'où :

$$\text{Card}(c) = C_4^1 \times C_6^2 = 60$$

$$\text{Donc : } P(C) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

4) D "Obtenir au moins deux boules Rouges"

C.a.d obtenir 2 boules Rouges et une non Rouge ou obtenir 3 boules Rouge; d'où :

$$\text{Card}(D) = C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3 = 40$$

$$\text{Donc } P(D) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

Exercice 4

$h(x) = (x+1)e^x$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1) a) \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} ; \text{ On a : } (xe^x)' &= e^x + xe^x \\ &= (1+x)e^x \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc la fonction } x \mapsto xe^x \text{ est une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R} ; \text{ d'où ; } I &= \int_{-1}^0 h(x) dx \\ &= [xe^x]_{-1}^0 \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } I = \frac{1}{e}$$

$$6) \text{ En utilisant une intégration par parties calculons } J = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^x dx$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u = (x+1)^2 & \Rightarrow u' = 2(x+1) \\ v' = e^x & \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } J &= \left[(x+1)^2 e^x \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2(x+1)e^x dx \\ &= 1 - 2 \int_{-1}^0 (x+1)e^x dx \\ &= 1 - 2I \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{e} \\ &= \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } J = \frac{e-2}{e}$$

$$2) a) (E) : y'' - 2y' + y = 0 .$$

L'équation caractéristique associée à (E) est : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{R}$; $r = 1$.

D'où les solutions de (E) sont de la forme : $y(x) = (\alpha x + \beta)e^x$; où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

b) On a $h(x) = (x+1)e^x$; donc pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$; h est solution de (E) et $h(0) = 1$; $h'(0) = 2$ (car $h'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$).

Problème

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$$

$$1) \text{ On a : } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 = +\infty. \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x} = +\infty).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 = -\infty \quad (\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{e^x} = 0)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 = +\infty$$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

$$3) a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 - x \right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 - 1 \right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 - 1 \right) \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 + 1 \right) \right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 2 \right) = 0$$

$$(\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \times \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2 \times t e^t = 0 ; \text{ en posant } t = \frac{x}{2})$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$ alors la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $f(x) - x = xe^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 2 \right)$

Tableau de signe de $f(x) - x$.

x	$-\infty$	0	$2 \ln 2$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	
$\left(e^{\frac{x}{2}} - 2 \right)$		$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	$+$

D'où : (C) est au-dessous de (Δ) sur l'intervalle $[0, 2 \ln 2]$ et au-dessus de (Δ) sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[2 \ln 2, +\infty[$

4) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$; comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a pour tout } x \in \mathbb{R} : f'(x) &= \left(x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 \right)' \\
 &= \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \\
 &= \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 + x e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 + x e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 6) \text{ On a : } e^{\frac{x}{2}} - 1 &= 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

D'où Tableau de signe de $x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)$	$-$	0	$+$
$x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)$	$+$	0	$+$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \geq 0$; par suite $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) \geq 0$

(Car $x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \geq 0$ et $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 \geq 0$).

Tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-----	-----------	-----	-----------

$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

5) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $f''(x) = \left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 + x e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \right)'$

$$= \left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) + x e^{\frac{x}{2}} \right) \right)'$$

$$= \left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \left((x+1) e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \right)'$$

$$= e^{\frac{x}{2}} \left((x+1) e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) + \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} (x+1) e^{\frac{x}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left(\left(x e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) + \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) (2 + x + 1) \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left(x e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} - 1 + (x+3) e^{\frac{x}{2}} - x - 3 \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left((2x+4) e^{\frac{x}{2}} - x - 4 \right)$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \times g(x)$ (où $g(x) = (2x+4) e^{\frac{x}{2}} - x - 4 ; (\forall x \in \mathbb{R})$).

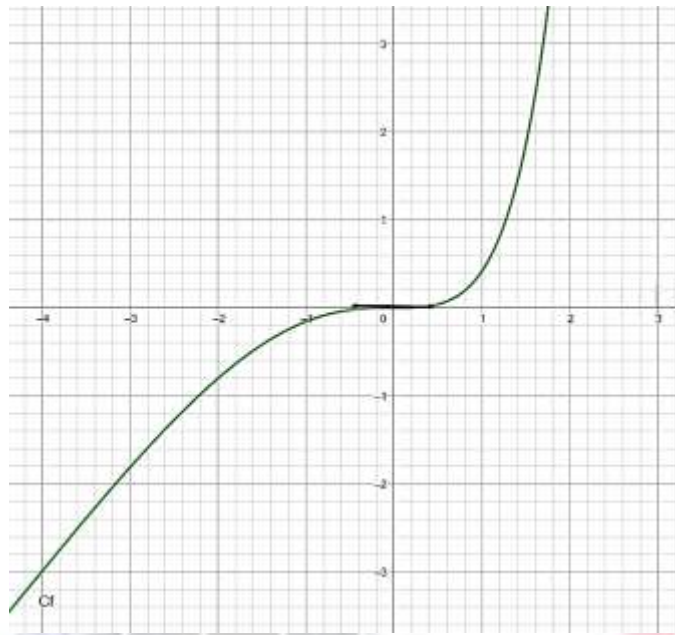
b) D'après la figure la courbe de g est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\alpha, 0]$ et au-dessus de l'axe des abscisses sur les intervalles $]-\infty, \alpha]$ et $[0, +\infty[$; donc.

- $(\forall x \in [\alpha, 0]) ; g(x) \leq 0$
- $(\forall x \in]-\infty, \alpha] \cup [0, +\infty[) ; g(x) \geq 0$

c) D'après la question 5) a) $f''(x)$ est du même signe que $g(x)$; d'où :

- (C) est concave sur $[\alpha, 0]$ et convexe sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha]$ et $[0, +\infty[$.

6) Construction de (C)



7) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R})$; et : $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[$

b) Calculons $(f^{-1})'(\ln 4)$

D'après la question 3)b) on a : $2\ln 2 = \ln 4$ et solution de l'équation

$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\Rightarrow f(\ln 4) = \ln 4 \Rightarrow f^{-1}(\ln 4) = \ln 4 \quad \text{et} \quad f'(\ln 4) = \left(e^{\frac{\ln 4}{2}} - 1 \right)^2 + \ln 4 e^{\frac{\ln 4}{2}} \left(e^{\frac{\ln 4}{2}} - 1 \right) \\ &= \left(e^{\frac{2\ln 2}{2}} - 1 \right)^2 + \ln 4 e^{\frac{2\ln 2}{2}} \left(e^{\frac{2\ln 2}{2}} - 1 \right) \\ &= (2 - 1)^2 + 2\ln 4 (2 - 1) \\ &= 1 + 2\ln 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } (f^{-1})'(\ln 4) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln 4))} \\ &= \frac{1}{f'(\ln 4)} \\ &= \frac{1}{1 + 2\ln 4} \end{aligned}$$

8) $(u_n) : u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrons par récurrence que : $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Pour $n=0$

On a : $u_0 = 1$; donc : $0 < u_0 < \ln 4$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $0 < u_n < \ln 4$ et montrons que $0 < u_{n+1} < \ln 4$

D'après ce qui précède on sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc :

$$0 < u_n < \ln 4 \Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(\ln 4) \\ \Rightarrow 0 < u_{n+1} < \ln 4$$

Conclusion : par principe de récurrence on a montré que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \ln 4$

b) D'après la question 3)b) on a : $f(x) - x \leq 0$ sur l'intervalle $[0, \ln 4]$; et comme $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0, \ln 4]$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante ; minorée par 0 donc elle est convergente.

d) On a : • f est continue sur $[0, \ln 4]$

- $f([0, \ln 4]) \subset [0, \ln 4]$
- $u_0 \in [0, \ln 4]$
- $u_{n+1} = f(u_n)$
- (u_n) est convergente

Donc si $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; alors l est solution de l'équation $f(x) = x$

Cet équation admet deux solutions 0 et $\ln 4$ mais comme la suite (u_n) est décroissante ; alors :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 = 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$