EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{x}}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie A

1. *Dresser le tableau de variation de f.*

2. a. *Déterminer les branches infinies de* (C)

   b. *Tracer* (C).

3. a. *Montrer que f est une bijection de IR sur* IR_+^*.

   b. *Tracer la courbe* (C') *représentative de la fonction réciproque* f^{-1} *de f.*

   c. *Calculer* $f^{-1}(x)$ *pour x > 0.*

4. a. *Vérifier que pour tout réel x, on a :* $f(x)=e^{x}-\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

   b. *Soit* λ *un réel strictement négatif.*

   Calculer l'aire $A(\lambda)$ *du domaine limité par la courbe* (C'), *l'axe des ordonnées et les droites d'équations* $y=\lambda$ *et y=0.*

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x, on pose : $F_n(x)=\int_x^0 \dfrac{e^{nt}}{1+e^{t}}\,dt$.

1. a. *Calculer* $F_1(x)$ *et déduire que :* $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x)=\ln 2$

   b. *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$

2. a. *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :* $F_{n+1}(x)+F_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(1-e^{nx}\right)$

   b. *Montrer par récurrence sur n, que* $F_n(x)$ *admet une limite finie lorsque x tend vers* $-\infty$.

   Dans la suite, on pose : $R_n=\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$.

3. a. *Vérifier que pour tout réel* $t\le 0$, $2e^{t}\le 1+e^{t}\le 2$.

EXERCICE 2

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $g(x)=1-x-e^{-2x}$

1- *Etudier les variations de g sur* $[0;+\infty[$

2- *Déterminer la limite de g en* $+\infty$ *(on ne demande pas de construire la courbe représentative de g*

3- *Démontrer qu'il existe un unique réel* α *strictement positif tel que* $g(\alpha)=0$ *et montrer que* $\dfrac{\ln 2}{2}<\alpha<1$

4- *Etudier le signe de g sur* $[0;+\infty[$

5- *Justifier que :* $0,79\le\alpha\le 0,80$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$

Et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Etude des variations de f

Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et montrer que : pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x)=\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{2}{x}}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$

2- Etude de la limite de f en 0.

a) Montrer que: pour tout réel x strictement positif : $\ln[f(x)]=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$

b) En déduire la limite de f en 0

c) Interpréter graphiquement le résultat

4) Etude de la limite de f en $+\infty$

a) Etudier la limite de $\frac{e^{2u}-1}{u^2}$ quand u tend vers 0

b) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) En déduire la limite de f en $+\infty$

5) Représentation graphique de f

Tracer la courbe C_f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\cos x$

1) a) Démontrer que: $\forall x\in[0;+\infty[,\ |f(x)|\le 5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que : $\forall x\in[0;+\infty[$, $f'(x)=-\frac{10}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

3) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0;2]$

4) Démontrer que : $\forall x\in[0;2\pi]$, $f(x+2\pi)=e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}f(x)$

5) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;4\pi]$

6) Tracer (C) la courbe représentative e de f sur l'intervalle $[0;4\pi]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

7) Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par : $f_1(x)=5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$ et $f_2(x)=-5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$ f2(x)=-5e3

On note (C_1) et (C_2) leurs représentations graphiques respectives dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Déterminer les points d'intersection de (C) et (C_1) et démontrer qu'en ces points, les courbes (C) et (C_1) ont une tangente commune.

b) Déterminer les points d'intersection de (C) et (C_2) et démontrer qu'en ces points, les courbes (C) et (C_2) ont une tangente commune

c) Tracer sur le graphique précèdent les courbes (C_1) et (C_2).