Série n° 6 d'exercices sur « Les nombres complexes » **2éme Bac SM**

Exercice 1

Soit a un réel différent de ± 1 .

1. Montrer que, pour tout réel x ; on a : $1-2a\cos(x)\ +a^2>0$.

2. Soit n un entier $n\geq 2$.

Montrer que $\prod_{k=1}^{n}\left(1-2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+a^2\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(a-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(a-e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$

3. En déduire que : $\prod_{k=1}^{n}\left(1-2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+a^2\right)=\left(a^n-1\right)^2$

4. En utilisant les sommes de Riemann, calculer $I=\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2a\cos\left(x\right)+a^2\right)dx$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a=2+i$; $b=-1-i$ *et* $c=-3+2i$.

Pour tout nombre complexe $z\neq c$ *on pose :* $Z=\frac{z-a}{z-c}$.

1) a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $w=\frac{b-a}{b-c}$

b) En déduire la nature du triangle ABC .

2) a) On pose $z=x+iy$ *où x et y sont des réels*

Vérifier que l'on a : $\begin{cases} Re\left(Z\right)=\dfrac{x^2+y^2+x-3y-4}{\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2} \\ Im\left(Z\right)=\dfrac{x+5y-7}{\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2} \end{cases}$

b) En déduire l'ensemble $\left(\zeta\right)$ *des points* $M\left(z\right)$ *tels que Z est imaginaire.*

c) Vérifier que l'ensemble $\left(\zeta\right)$ *est le cercle circonscrit au triangle ABC privé d ' un point.*

3) Montrer que l'ensemble des points $M\left(z\right)$ *tels que :* $Z\in\mathbb{R}$ *est la droite* $\left(AC\right)$ *privée d'un point*

Exercice 3

Le plan complexe $\left(\wp\right)$ *est rapporté à un repère orthonormé* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=1+i$; $z_B=2-\sqrt{3}+i$; $z_C=2$ *et* $z_D=\sqrt{3}-i$.

1) a) Donner la forme exponentielle de z_D .

b) Montrer que OBCD est un parallélogramme.

2) Donner la forme exponentielle de z_A *et puis la forme algébrique de* $\frac{z_B}{z_A}$

3) a) Montrer que : $\frac{z_B}{z_A}=\left(\sqrt{3}-1\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$ *3 1 e .z*

b) En déduire la forme exponentielle de z_B

c) Donner alors $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. *On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives :* $a=-1+i\sqrt{3}$; $b=2i$; $c=1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$ *et* $d=1+i$.

I°/ 1°) a- Mettre a et d sous forme exponentielle

b- Montrer que le point C appartient au cercle ζ *de centre B et de rayon 2.*

c- Placer les points A , B et C.

d- Montrer que le quadrilatère OCBA est parallélogramme.

2°) a- Mettre $\frac{c}{d}$ *sous forme algébrique.*

b- Montrer que : $\frac{c}{d}=\left(\sqrt{3}-1\right)e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c- Déduire la forme exponentielle de c

d- Déterminer alors les valeurs de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

II°/ On considère les points I , I' *et* E *d'affixes respectives* 1 ; -1 *et* $e=\frac{a-1}{1-\bar{a}}$

1°) Montrer que : $e.\bar{e}=1$ *puis interpréter géométriquement le résultat*

2°) Montrer que : $\frac{e-1}{a-1}$ *est réel puis interpréter géométriquement le résultat*

3°) Montrer que : $\frac{e+1}{a-1}$ *est imaginaire puis interpréter géométriquement le résultat*

4°) Déduire une construction du point E.

Exercice 5

On considère le nombre complexe tel que : $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

1) a) Montrer que : $|a|=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

b) Vérifier que : $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$.

2) a) Montrer que : $a=4\cos^2\frac{\pi}{8}+4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$. *(on donne* $\sin 2x=2\cos x\sin x$ *et* $\cos 2x=-1+2\cos^2 x$ *)*

b) En déduire la forme trigonométrique de a.

c) Donner la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.

Exercice 6

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

On donne les points A et B d'affixes respectives i *et* $-i$.

On considère l'application f de $P\setminus\{A\}$ *dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :* $z'=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$.

1) a) Démontrer que si $z\neq 0$ *et* $z'\neq 0$ *alors :* $|z'|\neq|z|$ *et* $arg(z')\equiv -arg(z)+2\,arg(z-i)[2\pi]$

b) Montrer que si $|z|=1$ *alors* $f(M)=B$

2) a) Déterminer le point M tel que : $f(M)=M$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' *est imaginaire.*

3) a) Démontrer que : $z'+i=\frac{z\overline{z}-1}{\left|\overline{z}+i\right|^{2}}(z-i)$ et $z'-z=\frac{-i(z+\overline{z})}{\left|\overline{z}+i\right|^{2}}(z-i)$

b) En déduire que : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires et que : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux

c) Déduire alors une construction du point M' .