guessmaths

Nombres complexes – Exercices 3 **2éme Bac SM**

Exercice 1 :

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

■ $z_1 = 3+3i$ ■ $z_2 = -1-i\sqrt{3}$ ■ $z_3 = -\frac{4}{3}i$ ■ $z_4 = -2$ ■ $z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$; $\theta \in]-\pi;\pi[$

Pour z_5, *factoriser par* $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

■ $z_6 = 1+i$ ■ $z_7 = 1+i\sqrt{3}$ ■ $z_8 = \sqrt{3}+i$ ■ $z_9 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ ■ $z_{10} = 1+e^{i\theta}$; $\theta \in]-\pi;\pi[$

Pour z_{10}, *factoriser par* $e^{\frac{i\theta}{2}}$

2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leur conjugués.

■ $z_1 = 1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$ ■ $z_2 = \sqrt{10+2\sqrt{5}} + i\left(1-\sqrt{5}\right)$ ■ $z_3 = \frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i}$ *où* $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

■ $z_4 = 11 + i\tan(\theta)$ *où* $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

3. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2020}$

Correction exercice 1:

1. ■ $z_1 = 3+3i$ *donc* $|z_1| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ *ou Si on met 3 en facteur* $|z_1| = 3|1+i| = 3\sqrt{1^2+1^2} = 3\sqrt{2}$.

On appelle θ_1 *un argument de* z_1

$\cos(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ *et* $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, *et* $\overline{z_1} = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode *(meilleure),*

on met le module en facteur ■ $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}i\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$,

■ $z_2 = -1-i\sqrt{3}$ *donc* $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

soit θ_2 *un argument de* z_2 *et Donc* $\cos(\theta_2) = -\frac{1}{2}$ *et* $\sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ *et* $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, *et* $\overline{z_2} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

■*Pour* $z_3 = -\frac{4}{3}i$ *la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.*

$z_3 = -\frac{4}{3}i = -\frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ *Cette forme n'est pas la forme exponentielle car* $-\frac{4}{3}$ *est négatif, ce n'est donc pas le module, mais* $-1 = e^{i\pi}$, *donc* $z_3 = e^{i\pi} \times \frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$; *donc* $\overline{z_3} = \frac{4}{3}e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

■ $z_4=-2$ la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode $-1=e^{i\pi}$;donc $z_4=2e^{i\pi}$ et $\overline{z}_4=2e^{-i\pi}$

■ $z_5=e^{i\theta}+e^{2i\theta}=e^{\frac{3i\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{\frac{3i\theta}{2}}\times 2\times\cos\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\times e^{\frac{3i\theta}{2}}$

Comme $\theta\in\left]-\pi;\pi\right[$ alors $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$; donc $\cos\frac{\theta}{2}>0$; par suite $|z_5|=2\cos\frac{\theta}{2}$

D'où $z_5=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{3i\theta}{2}}$ et $\overline{z}_5=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{3i\theta}{2}}$

■ $z_{10}=1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\times e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\times e^{i\frac{\theta}{2}}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\theta\in\left]-\pi;\pi\right[$ alors $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$; donc $\cos\frac{\theta}{2}>0$; par suite $|z_{10}|=2\cos\frac{\theta}{2}$

D'où $z_{10}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\overline{z}_{10}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\theta}{2}}$

2) $z_3=\dfrac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i}$

$$=\frac{(\tan(\varphi)-i)(\tan(\varphi)-i)}{\tan^2(\varphi)+1^2}$$
$$=\frac{(\tan^2(\varphi)-2i\tan(\varphi)-1)}{\frac{1}{\cos^2(\varphi)}}$$
$$=\left(\frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}-2i\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}-1\right)\cos^2(\varphi)$$
$$=\sin^2(\varphi)-\cos^2(\varphi)-2i\sin(\varphi)\cos(\varphi)$$
$$=1-2\cos^2(\varphi)-i\sin(2\varphi)$$
$$=-\cos(2\varphi)-i\sin(2\varphi)$$
$$=\cos(\pi-2\varphi)+i\sin(\pi-2\varphi)$$
$$=e^{i(\pi-2\varphi)}$$

Le module de z_3 est 1 et un argument est $(\pi-2\varphi)$

3) On sait que : $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$;

Donc : $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2020}=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2020}$

$$=e^{i\frac{2020\pi}{3}}$$
$$=e^{i\frac{2022\pi-2\pi}{3}}$$

$$= e^{i\frac{2022\pi}{3}} \times e^{i\frac{-2\pi}{3}}$$
$$= e^{i\frac{3\times337\times2\pi}{3}} \times e^{i\frac{-2\pi}{3}}$$
$$= e^{i337\times2\pi} \times e^{i\frac{-2\pi}{3}} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$$
$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2020} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\pi} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2:

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$

2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ *par le nombre complexe de module 3 et d'argument*

$-\frac{5\pi}{6}$.

3. Quotient du nombre complexe de modulo 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ *par le nombre complexe de module 3 et d'argument* $-\frac{5\pi}{6}$.

Correction exercice 2

1. $(3+2i)(1-3i) = 3+2i-3\times3i-2i\times3i = 3-6i^2-7i = 9-7i$.

2. $2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = 2\times3\times e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{-i\pi} = -6i$

3. $\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\pi} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

Exercice 3 :

Etablir les égalités suivantes :

1. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(1-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$

2. $(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\left(\sqrt{3}-i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$

3. $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

Correction exercice 3:

1. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+i\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$$= e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{84}}$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$

2. $(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\left(\sqrt{3}-i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\times 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$

3. $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$$
$$= e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

<u>Exercice 4 :</u>

Soit $u = 1+i$ *et* $v = -1+i\sqrt{3}$

1. Déterminer les modules de u et v.

2. Déterminer un argument de u et un argument de v.

3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.

4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

5. En déduire les valeurs de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

<u>Correction exercice 4</u>:

1 . $|u| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ *et* $|v| = \left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

2. ■ $u = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ *Donc un argument de u est* $\frac{\pi}{4}$.

■ $v = -1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ *Donc un argument de v est* $\frac{2\pi}{3}$

3. On cherche les solutions complexes de $z^3 = u$

$$z^3 = u \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = |u| \\ \arg z^3 \equiv \arg u\,[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \sqrt{2} \\ 3\arg z = \frac{\pi}{4}+2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[6]{2} \\ \arg z = \frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \,/\, k \in \{0;1;2\} \end{cases}$$

u admet trois racines cubiques $z_0 = \frac{\pi}{12}$ $z_1 = \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12}$ *et* $z_2 = \frac{\pi}{12}+\frac{2\times 2\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$

4. $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\arg\left(\frac{u}{v}\right) \equiv \arg(u)-\arg(v)\,[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$$

5. $\frac{u}{v} = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-1-i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)}{4}+i\frac{\left(-\sqrt{3}-1\right)}{4}$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4} \text{ et}$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)}{4} = -\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}$$

<u>Exercice 5:</u>

1. Calculer le module et un argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ *et* $v = 1-i$

2. En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

<u>Correction exercice 5:</u>

1. ■ $|u| = \frac{\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{6}^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc $|u|=\sqrt{2}$ *et un argument de u est* $-\frac{\pi}{6}$.

■ $|v|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$v=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Donc $|v|=\sqrt{2}$ *et un argument de v est* $-\frac{\pi}{4}$.

2. $\left|\frac{u}{v}\right|=\frac{|u|}{|v|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ *et* $\arg\left(\frac{u}{v}\right)\equiv\arg(u)-\arg(v)[2\pi]$

$$\equiv-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$$

Donc $\left|\frac{u}{v}\right|=1$ *et un argument de* $\frac{u}{v}$ *est* $\frac{\pi}{12}$.