GUESSMATHS

Revue n°3 :

Chapitre « Suites Numériques»

2éme Bac SC.Exp et Sciences Eco

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »

Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com

whatsapp : 0604488896

les suites numériques

Définitions :

1) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si : $(\forall n \geq n_0): u_n \leq u_{n+1}$

2) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si : $(\forall n \geq n_0): u_n \geq u_{n+1}$

4) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si $(\forall n \geq n_0): u_{n+1} = u_n$

5) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante

Suites bornées

Définition :

1) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que :$(\forall n \geq n_0): u_n \leq M$

2) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \geq n_0): u_n \geq m$

3) une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée ie
$(\forall n \geq n_0): m \leq u_n \leq M$

Remarque : $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée ssi $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ est majorée

Suite arithmétique :

Définition :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que :
$(\forall n \geq n_0): u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r s'appelle la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq n_0}$

1) Trois réels a ; b et c dans cet ordre sont en progression arithmétique si : $a + b = 2c$

2) Terme général d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq n_0): u_n = u_p + (n-p)r$

Si le premier terme est u_0 alors : $(\forall n \geq 0): u_n = u_0 + n \times r$

3) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r alors : $u_p + u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\frac{u_n + u_p}{2}\right)$

Exemple : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Suite géométrique

Définition :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que :
$(\forall n \geq n_0): u_{n+1} = u_n \times q$. Le réel q s'appelle la raison de la suite géométrique $(u_n)_{n\geq n_0}$

1) Trois réels a ; b et c dans cet ordre sont en progression géométrique si : $a \times c = b^2$

2) Terme général d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q alors : $(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq n_0): u_n = u_p \times q^{n-p}$

Si le premier terme est u_0 alors : $(\forall n \geq 0): u_n = u_0 \times q^n$

3) somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q tel que $q\neq 1$ alors :

$$u_p+u_p+\cdots+u_n=u_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Exemple : $1+a+a^2+\cdots+a^n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ Si $a\neq 1$

Définition :

Soit (u_n) une suite

1) On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si : $(\forall A>0)(\exists N\in\mathbb{N})/\ u_n>A$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

2) on dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si : $(\forall A>0)(\exists N\in\mathbb{N})/\ u_n<-A$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$

3) Soit $l\in\mathbb{R}$.

On dit que la suite (u_n) tend vers l si : $(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})/(\forall n\geq N);|u_n-l|<\varepsilon$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

Remarque : la limite si elle existe est unique

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^p}=0$ avec $p\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

Si $\alpha>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$

Définition :

Si une suite admet une limite finie on dit qu'elle est convergente sinon on dit qu'elle est divergente

Remarques :

*Si une suite est convergente alors sa limite est unique

*Toute suite convergente est bornée

* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-l)=0$

* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$

Théorèmes de comparaison :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que à partir d'un certain rang n_0 on a : $u_n \le v_n$

1) Si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Critères de convergence :

1) Théorème des gendarmes

Soient (u_n) ; (v_n) et (w_n) trois suites numériques telles que à partir d'un certain rang n_0 on a : $v_n \le u_n \le w_n$

Si (v_n) et (w_n) sont convergentes vers la même limite l alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

2) Si $|u_n - l| \le v_n$ à partir d'un certain rang n_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

La monotonie et la convergence :

1) Toute suite croissante et majorée est convergente
2) Toute suite décroissante et minorée est convergente
3) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
4) toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Limite de q^n :

Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Si $q \le -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème :

Soit I un segment, et soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Si f est continue sur I, $f(I) \subset I$ et (u_n) est convergente, alors la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$.

Limites des suites : Méthodes

1) Si on veut montrer qu'une suite (u_n) est monotone.
   - **On peut** étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   - **On peut** comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec $u_n \ne 0$.
   - **On peut** comparer u_0 et u_1 ; puis faire une démonstration par récurrence.
   - **On peut** si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser les variations de f et faire une démonstration par récurrence.
2) Si on veut montrer qu'une suite (u_n) est convergente.
   - **On peut** montrer que (u_n) est croissante majorée (ou décroissante minorée) .

- **On peut** encadrer (u_n) par deux suites convergentes de même limite.
- **On peut** déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ en utilisant les opérations sur les limites.
- **On peut** montrer que $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3) Si on veut montrer qu'une suite (u_n) est divergente.

- **On peut** déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$
- **On peut** trouver une suite (v_n) telle que $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ ou telle que $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- **On peut** supposer que (u_n) converge vers l et on aboutit à une contradiction.

4) Si on veut chercher la limite d'une suite convergente (u_n).

- **On peut** déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ en utilisant les opérations sur les limites des suites , si possible .

5) Si on veut montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$

- **On peut** utiliser la différence et l'encadrement.

6) Si on veut montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$

- **On peut** montrer par récurrence.
- **On peut** utiliser la méthode d'itération. (produit terme à terme)

7) Si on veut montrer que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes,

- **On peut** utiliser la définition.

EXERCICESV SUR LES SUITES NUMERIQUES

Exercice 1 : (avec solution)

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3-U_n} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

1/ Calculer U_1 et U_2.

2/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 < U_n < 2$

3/ Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$

Puis déduire la monotonie de (U_n)

Correction Exercice 1 :

1- $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3-U_n} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

- $U_1 = \dfrac{2}{3-U_0} = \dfrac{2}{3-\dfrac{3}{2}} = \dfrac{4}{3}$

- $U_2 = \dfrac{2}{3-U_1} = \dfrac{2}{3-\dfrac{4}{3}} = \dfrac{6}{5}$

2/ **Pour n=0**

On a : $U_0 = \dfrac{3}{2}$ donc $1 < U_0 = \dfrac{3}{2} < 2$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

Pour n∈ $\mathbb{N}$

Supposons que pour $1 < U_n < 2$ et montrons que $1 < U_{n+1} < 2$

On a : $1 < U_n < 2 \Rightarrow -2 < -U_n < -1$

$$\Rightarrow 3-2 < 3-U_n < 3-1$$

$$\Rightarrow 1 < 3-U_n < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{3-U_n} < 1$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3-U_n} < 2$$

$$\Rightarrow 1 < U_{n+1} < 2$$

Donc la proposition $1 < U_n < 2$ est vraie pour $(n+1)$.

Conclusion : On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 < U_n < 2$.

3/ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2}{3-U_n} - U_n$

$$= \frac{2 - U_n(3 - U_n)}{3 - U_n}$$

$$= \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3 - u_n}$$

$$= \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{3 - u_n}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n == \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{3 - u_n}$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 < u_n < 2 \Rightarrow \begin{cases} u_n - 1 > 0 \\ u_n - 2 < 0 \\ 3 - u_n > 0 \end{cases}$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc : (u_n) est une suite strictement décroissante.

Exercice n°2

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Montrer que la suite (U_n) est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = U_n - 1$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométriques de raison $q = 3$.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$.
Exprimer S_n puis S'_n en fonction de n.

4) Soit la suite (W_n) définie sur IN par : $W_n = \ln(U_n - 1)$.

a) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ln(3)$.

b) Exprimer W_n puis retrouver U_n en fonction de n.

Correction Exercice 2 :

(U_n) : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) a) On a : $U_1 = 3U_0 - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13$; $U_2 = 3U_1 - 2 = 3 \times 13 - 2 = 37$

b) • $U_1 - U_0 = 7$ et $U_2 - U_1 = 25$; donc $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$; d'où (U_n) ne peut pas être arithmétique.

• $\frac{U_1}{U_0} = \frac{13}{5}$ et $\frac{U_2}{U_1} = \frac{37}{13}$; donc $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$; d'où (U_n) ne peut pas être géométrique.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on pose : $V_n = U_n - 1$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_{n+1} = U_{n+1} - 1$

$$= 3U_n - 2 - 1$$

$$=3U_n-3$$
$$=3(U_n-1)$$
$$=3V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q=3$

b) On déduit de la question précédente que pour tout $n\in\mathbb{N}$; on a :

$V_n=V_0\times 3^n$ et $V_0=5-1=4$; d'où : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $V_n=4\times 3^n$

De plus Pour tout $n\in\mathbb{N}$; on a : $V_n=U_n-1$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n=1+4\times 3^n$

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

3) On pose : $S_n=V_0+V_1+\dots\dots+V_n$ et $S'_n=U_0+U_1+\dots\dots+U_n$.

- (V_n) est une suite géométrique de raison $q=3$; donc : $S_n=V_0\times\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}$

$$=4\times\frac{1-3^{n+1}}{-2}$$
$$=2\times\left(3^{n+1}-1\right)$$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $S_n=2\times\left(3^{n+1}-1\right)$

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$; on a : $V_n=U_n-1 \Leftrightarrow U_n=1+V_n$; donc $S'_n=U_0+U_1+\dots\dots+U_n$

$$=V_0+1+V_1+1+\dots\dots+V_n+1$$
$$=\underbrace{V_0+V_1+\dots\dots+V_n}_{S'_n}+\underbrace{1+1\cdots+1}_{n+1\text{ fois}}$$
$$=S'_n+n+1$$
$$=2\times\left(3^{n+1}-1\right)+n+1$$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $S'_n=2\times\left(3^{n+1}-1\right)+n+1$

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$; on pose : $W_n=\ln(U_n-1)$

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$; on a : $W_{n+1}-W_n=\ln(U_{n+1}-1)-\ln(U_n-1)$

$$=\ln(3U_n-2\ \ -1)-\ln(U_n-1)$$
$$=\ln(3(U_n-1))-\ln(U_n-1)$$
$$=\ln(3)+\ln(U_n-1)-\ln(U_n-1)$$
$$=\ln(3)$$

Donc (W_n) est une suite arithmétique de raison $r=\ln(3)$.

b) (W_n) est une suite arithmétique de raison $r=\ln(3)$ et de premier terme

(Question à traiter après la leçon « fonction logarithme)

$$W_0=\ln(U_0-1)$$
$$=\ln(5-1)$$
$$=2\ln(2)$$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $W_n=2\ln(2)+n\ln(3)$

Et pour tout $n\in\mathbb{N}$; $W_n=\ln(U_n-1) \Rightarrow U_n-1=e^{W_n}$

$$\Rightarrow U_n=e^{2\ln(2)+n\ln(3)}+1$$

$$\Rightarrow U_n = e^{\ln(4)+\ln(3^n)} + 1$$

$$\Rightarrow U_n = e^{\ln(4)} \times e^{\ln(3^n)} + 1$$

$$\Rightarrow U_n = 1 + 4 \times 3^n$$

Et on retrouve : $U_n = 1 + 4 \times 3^n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice n° 3 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2e \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + e) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) Calculer U_1 et U_2.

2) a) Montrer par récurrence que : $U_n > e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire la suite (U_n) est convergente.

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - e$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Correction Exercice 3 :

(U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2e \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + e) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) On a : $U_1 = \frac{1}{2}(U_0 + e) = \frac{3e}{2}$ et $U_2 = \frac{1}{2}(U_1 + e) = \frac{1}{2}\left(\frac{3e}{2} + e\right) = \frac{5e}{4}$.

2) a) Montrons par récurrence que : $U_n > e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour n=0

$U_0 = 2e$; donc $U_0 > e$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $U_n > e$ et montrons que $U_{n+1} > e$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $U_n > e \Rightarrow U_n + e > e + e$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(U_n + e) > e$$

$$\Rightarrow U_{n+1} > e$$

Conclusion :

$U_n > e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrons que la suite (U_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + e) - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(e - U_n)$$

Et comme $U_n > e \Rightarrow e - U_n < 0$; d'où $U_{n+1} - U_n < 0$

Donc la suite (U_n) est décroissante.

c) la suite (U_n) est décroissante minorée par e donc elle est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on pose : $V_n = U_n - e$

a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_{n+1} = U_{n+1} - e$

$$= \frac{1}{2}(U_n + e) - e$$

$$= \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}e - e$$

$$= \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2}e$$

$$= \frac{1}{2}(U_n - e)$$

$$= \frac{1}{2}V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; et de 1[er] terme $V_0 = U_0 - e = e$

b) • (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; et de 1[er] terme $V_0 = U_0 - e = e$

Donc Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$= e \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $V_n = e \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_n = U_n - e \Rightarrow U_n = e + V_n$
$\Rightarrow U_n = e + e \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$\Rightarrow U_n = e\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Donc :$(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n = e\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$) ; alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = e$

Exercice n° 4 :

On considère la suite (W_n) définie par : $\begin{cases} W_0 = 5 \\ W_{n+1} = \dfrac{5W_n - 4}{1 + W_n} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

I. Dans cette première partie, nous allons montrer que (W_n) est convergente sans calculer sa limite:

1. Montrer par récurrence que : $W_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (W_n) est décroissante.
3. En déduire que (W_n) est convergente.

II. Dans cette deuxième partie, nous allons calculer la limite de (W_n) par deux différentes méthodes :

1. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \dfrac{3}{W_n - 2}$;

   a) Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})$; $V_{n+1} = \dfrac{1 + W_n}{W_n - 2}$

   b) Montrer que (V_n) est arithmétique de raison 1.

2. Ecrire V_n en fonction de n et montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$;$W_n = \dfrac{5 + 2n}{n + 1}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$.

3. On considère la fonction f définie sur $I = [2,5]$ par :$f(x) = \dfrac{5x - 4}{1 + x}$.

   a) Montrer que f est continue sur I.
   b) Etudier les variations de f sur I.
   c) Montrer que : $f(I) \subset I$.
   d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$ (Remarquer que $(\forall n \in \mathbb{N})$;$W_{n+1} = f(W_n)$)

Correction Exercice 4 :

$$(W_n):\begin{cases} W_0 = 5 \\ W_{n+1} = \dfrac{5W_n - 4}{1+W_n} \end{cases} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

I. 1. Montrons par récurrence que : $W_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour n=0 On a ; $W_0 = 5$ donc : $W_0 > 2$

Soit n∈N supposons que $W_n > 2$ et montrons que $W_{n+1} > 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $W_{n+1} - 2 = \dfrac{5W_n - 4}{1+W_n} - 2$

$$= \frac{5W_n - 4 - 2(1+W_n)}{1+W_n}$$

$$= \frac{3(W_n - 2)}{1+W_n}$$

Et comme $W_n > 2$; Pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc $W_{n+1} - 2 > 0 \Rightarrow W_{n+1} > 2$;

Conclusion $(\forall n \in \mathbb{N})$; $W_n > 2$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $W_{n+1} - W_n = \dfrac{5W_n - 4}{1+W_n} - W_n$

$$= \frac{5W_n - 4 - W_n(1+W_n)}{1+W_n}$$

$$= \frac{5W_n - 4 - W_n - W_n^2}{1+W_n}$$

$$= \frac{-(W_n^2 - 4W_n + 4)}{1+W_n}$$

$$= \frac{-(W_n - 2)^2}{1+W_n}$$

D'où $W_{n+1} - W_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; par suite (W_n) est strictement décroissante.

3. (W_n) est strictement décroissante minorée par 2 donc elle est convergente.

II. 1. (V_n) : $V_n = \dfrac{3}{W_n - 2}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_{n+1} = \dfrac{3}{W_{n+1} - 2}$

$$= \dfrac{3}{\dfrac{5W_n - 4}{1+W_n} - 2}$$

$$= \dfrac{3(1+W_n)}{5W_n - 4 - 2(1+W_n)}$$

$$= \dfrac{3(1+W_n)}{3W_n - 6}$$

$$= \dfrac{1+W_n}{W_n - 2}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $V_{n+1} = \dfrac{1+W_n}{W_n - 2}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1+W_n}{W_n - 2} - \dfrac{3}{W_{n+1} - 2}$

$$= \dfrac{W_n - 2}{W_n - 2} = 1$$

Donc la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 1$.

2. La suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et $V_0 = \dfrac{3}{W_0 - 2} = 1$; donc Pour tout $n \in \mathbb{N}$;

on a : $V_n = V_0 + n \times r \Rightarrow V_n = 1 + n$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $V_n = 1 + n$

donc Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_n = \dfrac{3}{W_n - 2}$ $\Rightarrow W_n - 2 = \dfrac{3}{V_n}$

$$\Rightarrow W_n = 2 + \dfrac{3}{V_n}$$

$$\Rightarrow W_n = 2 + \dfrac{3}{1+n}$$

$$\Rightarrow W_n = \dfrac{5+2n}{1+n}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $W_n = \dfrac{5+2n}{1+n}$; et $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5+2n}{1+n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n}+2}{\dfrac{1}{n}+1} = 2$

3. $f(x) = \dfrac{5x - 4}{1 + x}$; sur $I = [2,5]$.

a) f est continue sur $I = [2,5]$ comme quotient de deux fonctions continue sur $I = [2,5]$ (car $1 + x \neq 0$ pour tout $x \in I$)

b) pour tout $x \in I$; on a : $f'(x) = \left(\dfrac{5x-4}{1+x}\right)'$

$$= \frac{5(1+x)-(5x-4)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{9}{(1+x)^2}$$

Donc : pour tout $x \in I$; $f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur $I = [2,5]$.

c) f est continue strictement croissante sur $I = [2,5]$; donc

$f(I) = f([2,5]) = [f(2), f(5)] = \left[2, \frac{21}{6}\right] \subset I = [2,5]$.

d) On a : • f est continue sur $I = [2,5]$

• $f(I) \subset I$

• $W_0 \in I = [2,5]$

• $W_{n+1} = f(W_n)$

• (W_n) est convergente.

Donc si $l = \lim_{n\to+\infty} W_n$; alors l est solution de l'équation $f(x) = x$

Résolvons l'équation $f(x) = x$

On a : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5x-4}{1+x} = x$

$\Leftrightarrow 5x - 4 = x(1+x)$

$\Leftrightarrow 5x - 4 = x + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$; d'où $\lim_{n\to+\infty} W_n = 2$

Exercice n° 5

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

1. a. Calculer U_1 et U_2.

   b. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n ; $U_n > 0$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $U_n < 1$.

   a. Montrer que la suite (U_n) est croissante.

   b. Montrer que la suite (U_n) converge.

3. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier n, par : $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$

   a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 3.

   b. Exprimer V_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n ; $U_n = \frac{3^n}{3^n+1}$

   d. Déterminer la limite de la suite (U_n).

Correction Exercice 5 :

$$(U_n)\ :\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{1+2U_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

1. a. On a : ● $U_1 = \dfrac{3U_0}{1+2U_0}$

$$= \frac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

● $U_2 = \dfrac{3U_1}{1+2U_1}$.

$$= \frac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{10}{4}}$$

$$= \frac{9}{10}$$

b. Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel n ; $U_n > 0$.

Pour n=0

On a : $U_0 = \dfrac{1}{2}$; donc : $U_0 > 0$

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{1+2U_n}$ et $U_n > 0$ (Hypothèse de récurrence)

Donc $\begin{cases} 3U_n > 0 \\ 1+2U_n > 0 \end{cases} \Rightarrow U_{n+1} > 0$

Conclusion

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n > 0$

2. Pour tout entier naturel n, $U_n < 1$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3U_n}{1+2U_n} - U_n$

$$= \frac{3U_n - U_n(1+2U_n)}{1+2U_n}$$

$$= \frac{3U_n - U_n - 2U_n^{2}}{1+2U_n}$$

$$= \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$$

Et comme $0 < U_n < 1$ *; donc* $U_{n+1} - U_n > 0$

Par suite (U_n) *est croissante.*

b) (U_n) *est croissante majorée par 1 donc elle est convergente..*

3. Pour tout entier n, par : $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$

a. Montrons que la suite (V_n) *est une suite géométrique de raison 3.*

Pour tout entier n, on a : $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{1-U_{n+1}}$

$$= \frac{3U_n}{1+2U_n-3U_n}$$

$$= \frac{3U_n}{1-U_n}$$

$$= 3V_n$$

Donc la suite (V_n) *est une suite géométrique de raison 3.*

b. Pour tout entier n, on a : $V_n = V_0 \times 3^n$ *et* $V_0 = \frac{U_0}{1-U_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ *; donc :* $(\forall n \in \mathbb{N})$ *;* $V_n = 3^n$

c. Pour tout entier n, on a : $V_n = \frac{U_n}{1-U_n} \Rightarrow (1-U_n)V_n - U_n = 0$

$$\Rightarrow V_n - U_nV_n - U_n = 0$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{V_n}{1+V_n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$ *;* $U_n = \frac{3^n}{3^n+1}$

d. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n+1}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} \quad \left(et \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \qquad (-1<\frac{1}{3}<1)\right.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice n° 6 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{6-U_n}{4-U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $U_n < 2$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n-2)(U_n-3)}{4-U_n}$

c) Montrer alors que la suite (U_n) est croissante.

d) Déduire que (U_n) est convergente.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{2U_n-6}{U_n-2}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2 .

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$; $U_n = \frac{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

d) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Correction Exercice 6 :

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{6-U_n}{4-U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) a) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $U_n < 2$.

Pour n=0

On a : $U_0 = 0$; donc : $U_0 < 2$

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $U_n < 2$ et montrons que $U_{n+1} < 2$

On a : $U_{n+1} - 2 = \frac{6-U_n}{4-U_n} - 2$

$$= \frac{6-U_n-2(4-U_n)}{4-U_n}$$

$$= \frac{6-U_n-8+2U_n}{4-U_n}$$

$$= \frac{U_n - 2}{4 - U_n}$$

et $U_n < 2$ *(Hypothèse de récurrence)*

Donc $\begin{cases} U_n - 2 < 0 \\ 4 - U_n > 0 \end{cases} \Rightarrow U_{n+1} < 2$

Conclusion

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n < 2$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $U_{n+1} - U_n = \frac{6 - U_n}{4 - U_n} - U_n$

$$= \frac{6 - U_n - U_n(4 - U_n)}{4 - U_n}$$

$$= \frac{6 - U_n - 4U_n + U_n^2}{4 - U_n}$$

$$= \frac{U_n^2 - 5U_n + 6}{4 - U_n}$$

$$= \frac{U_n^2 - 2U_n - 3U_n + 6}{4 - U_n}$$

$$= \frac{(U_n - 2)U_n - 3(U_n - 2)}{4 - U_n}$$

$$= \frac{(U_n - 2)(U_n - 3)}{4 - U_n}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 2)(U_n - 3)}{4 - U_n}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *;on a :* $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 2)(U_n - 3)}{4 - U_n}$ *et* $U_n < 2$

Donc $U_{n+1} - U_n > 0$ *; par suite* (U_n) *est croissante.*

d) (U_n) *est croissante majorée par 2 ; donc elle est convergente.*

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on pose : $V_n = \dfrac{2U_n - 6}{U_n - 2}$

a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_{n+1} = \dfrac{2U_{n+1} - 6}{U_{n+1} - 2}$

$$= \frac{2 \times \dfrac{6-U_n}{4-U_n} - 6}{\dfrac{6-U_n}{4-U_n} - 2}$$

$$= \frac{\dfrac{2(6-U_n) - 6(4-U_n)}{4-U_n}}{\dfrac{(6-U_n) - 2(4-U_n)}{4-U_n}}$$

$$= \frac{12 - 2U_n - 24 + 6U_n}{6 - U_n - 8 + 2U_n}$$

$$= \frac{2(2U_n - 6)}{U_n - 2}$$

$$= 2\ V_n$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $V_{n+1} = 2\ V_n$; d'où la suite (V_n) est arithmétique de raison $q = 2$ et de 1^er^ terme $V_0 = \dfrac{2U_0 - 6}{U_0 - 2} = \dfrac{2U_0 - 6}{U_0 - 2} = 3$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_n = V_0 \times 2^n \Rightarrow V_n = 3 \times 2^n$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $V_n = \dfrac{2U_n - 6}{U_n - 2} \Rightarrow (U_n - 2)V_n = 2U_n - 6$

$$\Rightarrow U_nV_n - 2U_n = 2V_n - 6$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{2V_n - 6}{V_n - 2}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{2 \times 3 \times 2^n - 6}{3 \times 2^n - 2}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{6(2^n - 1)}{3 \times 2^n - 2}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \times 2^n}{\left(3 - 2\left(\dfrac{1}{2^n}\right)\right) \times 2^n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{6\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{3 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$$

$$d)\ \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad et \ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \ (car\ -1 < \frac{1}{2} < 1)$$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$